

الحكومة المصرية — نظارة المعارف العمومية

ادارة التعليم الزراعى والصناعى والتجارى

كاتب

# الخواص الهندسية للقضايا المخترقة

تأليف

شارلس سميث

المدرس بكلية سدنى سكس بكمبرج

وترجمة

محمد عبيد افندى

مدرس الترجمة بمدرسة المعلمين الخديوية

الجزء الثانى

راجعته ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة

وقد ترجم هذا الكتاب ونشر بتصريح من الخواجات مكلان وشركائه بلوندره ليمتد

(حقوق الطبع محفوظة للنظارة)

(الطبعة الثانية)

بالطبعة الاميرية بمصر

١٩٣٠ ١٩١٢ م







الحكومة المصرية — نظارة المعارف العمومية

ادارة التعليم الزراعى والصناعى والتجارى

كتاب

# الخواص الهندسية للقضايا المخبرية

تأليف

شارلس سمث

المدرس بكلية سدنى سكس بكبرىج

وترجمة

محمد عبيد افندى

مدرس الترجمة بمدرسة المعلمين الخديوية

الجزء الثانى

راجعه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة

وقد ترجم هذا الكتاب ونشر بتصريح من الخواجات مكملان وشركائه بلوندره ليمتد

(حقوق الطبع محفوظة للنظارة)

(الطبعة الثانية)

بالطبعة الاميرية بمصر

١٩١٢ ٨ ١٣٣٠ م



مباحث  
الجزء الثانى  
من كتاب الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

---

الفصل السادس

صحيفة  
فى المسقط العمودى ... .. ٧

الفصل السابع

فى النسب التعاكسية والتضامن والمسقط المخروطى ... .. ١٦

---





## الجزء الثاني

من كتاب الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

---



بسم الله الرحمن الرحيم  
الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد سيد المرسلين  
وعلى آله وصحبه أجمعين

### (الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية)

#### الفصل السادس

##### المسقط العمودي

١٢٩ - تعريف - موقع العمود النازل من نقطة على مستو ثابت يسمى (المسقط العمودي) لهذه النقطة على هذا المستوى ويسمى المستوى الثابت مستوى المسقط وإذا تحركت نقطة فرضت منحنيًا فإن مسقطها العمودي على مستو معلوم يرسم منحنيًا يقال له المسقط العمودي للنحني المعلوم وعلى العمود إذا وصلت نقطة اختيارية مثل نقطة ع بنقطة ثابتة مثل نقطة ف ثم قطع المستقيم ف ع بمستو ثابت في نقطة ع' يقال إن نقطة ع' هي مسقط ع على المستوى الثابت وكذلك تسمى نقطة ف مركز الإسقاط ويسمى المستوى الثابت مستوى المسقط

وإذا فالمسقط العمودي ماهو إلا حالة خصوصية فيها يكون مركز الإسقاط على بعد لانهائي وفي اتجاه عمودي على مستوى المسقط

١٣٠ - الخواص الأساسية للساقط العمودية هي الآتية

(١) مسقط الخط المستقيم هو خط مستقيم

للبهنة على ذلك نفرض أن المستقيم المعلوم يقطع مستوى المسقط في نقطة أ ونفرض أن ع' هي مسقط أى نقطة مثل نقطة ع على المستقيم المعلوم فإذا أخذت أى نقطة أخرى على المستقيم المعلوم مثل نقطة د وفرض أن

و هو العمود النازل من و على المستقيم ا ع يكون و و موازيا للمستقيم ع ع واذا فهو أيضا عمود على مستوى المسقط واذا تكون نقطة و هي مسقط نقطة و . وحينئذ فسقط كل نقطة من نقط المستقيم ا ع يلزم أن توجد على المستقيم ا ع

### (٢) مسقط المستقيمت المتوازية مستقيمت متوازية

لان مسقط نقطة تقاطع مستقيمتين هو نقطة تقاطع مسقطيهما فاذا بعدت احدى هاتين النقطتين الى مالا نهاية بعدت الثانية أيضا الى مالا نهاية . وحينئذ فاذا كان المستقيمان الاصليان متوازيين كان مسقطيهما المسقط متوازيين أيضا وبالعكس اذا كان المسقطان متوازيين كان المستقيمان الاصليان متوازيين

### (٣) النسبة بين أجزاء المستقيم الواحد أو أجزاء المستقيمت المتوازية تساوى النسبة بين مساقطها

لانه اذا فرض أن ا ب و ا ب هما مسقطا المستقيمتين المتوازيين ا ب و ا ب على التناظر

ثم رسم من ا ب موازيان للمستقيمتين ا ب و ا ب و ليقطعا ب ب و ب على التناظر في قطعي و ب و ب

يكون المثلثان و ا ب و ا ب متشابهين ويكون

$$ا ب : ا ب = و ب : و ب$$

$$ا ب : و ب = و ب : ا ب$$

$$ا ب : و ب = و ب : ا ب$$

$$لأن ا ب = و ب = و ب = و ب$$

(٤) عدد نقط تقاطع منحن بخط مستقيم (أو تقاطع منحن بمستوى بمنحني مستو آخر) يساوى عدد نقط تقاطع مسقطيهما .

(٥) مسقط المماس لمنحن هو مماس لمسقط هذا المنحنى

لانه اذا انطبقت نقطتان من نقط تقاطع مستقيم بمنحن انطبقت كذلك نقطتا تقاطع مسقطيهما  
وبالعكس اذا كان مسقطا خط مستقيم ومنحن مماسين فان المستقيم والمنحن نفسيهما يكونان مماسين

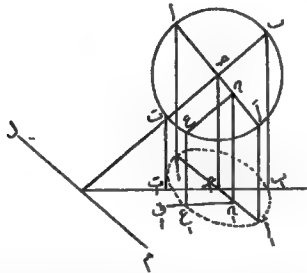
(٦) النسبة بين مساحة أى منحن فى مستو معلوم وبين مساحة مسقطه على مستو آخر معلوم تكون ثابتة

للبهنة على ذلك قسم سطح المنحنى المعلوم بعدد من المستطيلات حينما اتفق وذلك برسم جملتين من المستقيمات المتباعدة عن بعضها بمساافات متساوية وتكون احدى الجملتين موازية لخط تقاطع المستوى المعلوم بمستوى المسقط والاخرى عمودية على هذا الخط فالاجزاء الموازية لخط التقاطع لا تتغير بالاسقاط ولكن الاجزاء العمودية عليه تنقص بنسبة ثابتة [ هذه النسبة تساوى ١ : جتا هـ بفرض أن هـ هى الزاوية الواقعة بين المستويين ]  
وحينئذ فكل مستطيل وكذلك أى عدد من المستطيلات تنقص بالاسقاط بنسبة ثابتة ولكن اذا قربت الخطوط المتوازية من بعضها قربا لانهاثيا بحيث يصير كل مستطيل صغيرا صفرا لانهاثيا فان مجموعها يكون فى النهاية مساويا للمساحة التى رسمت فيها هذه المستطيلات واذا فنسبة أى مساحة فى مستو معلوم الى مساحة مسقطها على مستو آخر معلوم هى ثابتة

١٣١ - مسقط الدائرة هو قطع ناقص

لفرض ل م خط تقاطع مستوى الدائرة بمستوى المسقط

ولنفرض  $\alpha \wedge \Gamma$  قطر الدائرة الموازي للمستقيم  $ل م$   $\Gamma \wedge \beta$  هو القطر العمودي عليه ثم نفرض أن  $\alpha \wedge \Gamma$   $\Gamma \wedge \beta$  هما مسقطا  $\alpha \wedge \Gamma$   $\Gamma \wedge \beta$  على التناظر فحيث أن  $\alpha \wedge \Gamma$  مواز لمستوى المسقط فيكون  $\alpha \wedge \Gamma = \Gamma \wedge \beta$  ويكون  $\Gamma \wedge \beta$  عمودا على  $\alpha \wedge \Gamma$



ثم نفرض  $\beta \wedge \Gamma$  أي احدائى رأسى للقطر  $\alpha \wedge \Gamma$  في الدائرة ونفرض أن  $\beta \wedge \Gamma$  هو مسقط هذا القطر ونفرض أيضا أن  $\beta \wedge \Gamma$  يقطع الدائرة التي قطرها  $\alpha \wedge \Gamma$  في نقطة  $\beta$

فحيث أن الدائرتين  $\alpha \wedge \Gamma$   $\beta \wedge \Gamma$  متساويتان  $\beta \wedge \Gamma = \alpha \wedge \Gamma$  فيلزم أن يكون  $\beta \wedge \Gamma$  مساويا للمستقيم  $\beta \wedge \Gamma$

ومعلوم أن  $\beta \wedge \Gamma$  هما مسقطا المستقيمين المتوازيين  $\beta \wedge \Gamma$   $\alpha \wedge \Gamma$  على التناظر

$$\beta \wedge \Gamma : \beta \wedge \Gamma = \alpha \wedge \Gamma : \alpha \wedge \Gamma \quad \therefore$$

$$\beta \wedge \Gamma : \beta \wedge \Gamma =$$

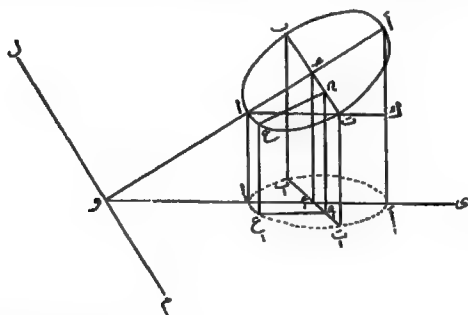
$$\beta \wedge \Gamma : \beta \wedge \Gamma = \alpha \wedge \Gamma : \alpha \wedge \Gamma \quad \text{وحيث أن يكون}$$

الدائرة ١٢١

- ۱۳۲

الأصلية الصغرى للقطع الناقص المعاو

لأنه بما أن  $W$  مواز للوتر  $AK$  يلزم أن يكون  $W$  في المستوى  $\alpha$  كـ



وحيث ان  $B$  عمود على المستوى  $\alpha$  وى فيكون المستقيم الموازى له  
ل  $M$  وعمودا أيضا على هذا المستوى وحينئذ فالقطعتان  $A_1B_1$  اللتان هما  
مستقتا  $A_1A_2$  على التناظر على المستوى ل  $M$  واقعتان على المستقيم وى

ثم نفرض أن  $\beta$   $\gamma$  هما مسقطا  $\delta$   $\epsilon$  على التناظر وحيث أن  $\beta$   $\gamma$  مواز لمستوى المسقط فيكون

$$\beta \gamma = \beta \gamma$$

ويكون أيضا  $\beta \gamma$  عمودا على  $\alpha \beta$

ثم نفرض  $\delta \epsilon$  أى احدائى رأسى للقطر  $\beta \gamma$  فى هذا القطع الناقص  $\delta \epsilon$  مسقط  $\delta \epsilon$

فحيث أن  $\delta \epsilon$  مواز للمستقيم  $\alpha \beta$  فيكون  $\delta \epsilon$  موازيا للمستقيم  $\alpha \beta$  ويكون

$$\delta \epsilon : \alpha \beta = \delta \epsilon : \alpha \beta$$

$$\delta \epsilon : \alpha \beta = \delta \epsilon : \alpha \beta$$

بفرض  $\delta$  هى نقطة تقاطع  $\delta \epsilon$  بالدائرة الاصلية الصغرى للقطع الناقص المذكور وحيث أن  $\alpha \beta = \beta \gamma$  بمقتضى الرسم فيكون  $\delta \epsilon = \delta \epsilon$  ولكن  $\alpha \beta = \delta \epsilon$   $\delta \epsilon$   $\alpha \beta$  عمود على  $\alpha \beta$  فينتج أن المحل الهندسى لنقطة  $\delta$  هو دائرة مساوية للدائرة الاصلية الصغرى للقطع الناقص

١٣٣ - اذا أسقط قطاع مخروطى ذو مركز اسقاطا عموديا وكان المسقط قطاعا مخروطيا آخر فن حيث أن وكل وترماز بمركز المنحنى الاول ينصفه هذا المركز وان النسبة بين أجزاء الخط المستقيم تساوى النسبة بين مساقطها فيكون مسقط مركز المنحنى الاول هو مركز المسقط

ثم انه حيث ان المماسات تنسقط على مماسات والخطوط المتوازية تنسقط على خطوط متوازية فينتج من ذلك أن أى قطرين متراجعين فى المنحنى الاصلى ينسقطان على منحنيين متراجعين فى المسقط



(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن كل مسقط عمودي لقطاع مخروطي هو قطاع مخروطي من نوعه وإن مركز هذا المسقط هو مسقط مركز المنحنى الاصلى [ بنى البرهان على بند ٤٥ أوبند ٧٩ أوبند ١٠١ ]

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن أى مستقيمين متقاطعين يمكن اسقاطهما اسقاطا عموديا على مستقيمين متعامدين

(مسألة ٣) المطلوب البرهنة على أن أى قطع زائد يمكن اسقاطه اسقاطا عموديا على قطع زائد قائم

(مسألة ٤) المطلوب البرهنة على أن النسبة بين مساحة القطع الناقص ومساحة دائرته الاصلية تساوى النسبة بين محوره الاصغر ومحوره الاكبر

١٣٤ - يمكن البرهنة على كثير من خواص القطع الناقص بواسطة اسقاطه على دائرة وتسمى هذه الخواص بالخواص المسقطية

(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمتصفات الأوتار المتوازية فى قطع ناقص هو خط مستقيم لذلك نسقط القطع الناقص على دائرة

فتكون الأوتار المتوازية منسقة على أوتار متوازية أيضا وتكون متصفات الأوتار الاصلية منسقة على متصفات مساقط الأوتار وإذا فعلينا أن نبرهن على أن المحل الهندسى لمتصفات الأوتار المتوازية فى دائرة هو خط مستقيم وذلك ثابت بمقتضى الهندسة الاصلية

(مسألة ٢) اذا فرض أن المماسين المرسومين من نهايتى الوتر  $CD$  فى قطع ناقص مركزه  $C$  يتقاطعان فى نقطة  $P$  وأن  $CP$  يقطع  $CD$  فى نقطة  $F$  ويقطع القطع الناقص فى نقطة  $E$  فالمطلوب البرهنة على أن  $CF = CP = CE$

للبهنة على ذلك نسقط القطع الناقص على دائرة فيكون مسقط مركز القطع الناقص هو مركز هذه الدائرة لأن كل وتر من أوتار الدائرة المار بمسقط مركز القطع الناقص تنصفه هذه النقطة

ثم نرض أن  $ح ط$   $ط ب$   $ب ق$   $ق د$   $د ه$   $ه ز$   $ز ح$  هي مساقط  $ح ط$   $ط ب$   $ب ق$   $ق د$   $د ه$   $ه ز$   $ز ح$  ف على التناظر نثبت أن مسقط مماس أى منحن هو مماس مسقط هذا المنحنى فيكون  $ط ب$   $ب ق$   $ق د$   $د ه$   $ه ز$   $ز ح$  مماسين للدائرة

وكذلك حيث أن النسبة بين أجزاء الخط المستقيم تساوى النسبة بين مساقطها فيكون

$$ح : ف : ع = ح : ب : ح$$

$$و \quad ح : ع : ط = ح : ب : ح$$

ولكن حيث أن المثلثين  $ح ب ط$   $ح ب ط$  متشابهان فيكون

$$ح : ب : ح = ح : ب : ح$$

$$ن \quad ح : ب : ح = ح : ب : ح$$

$$وحينئذ يكون  $ح : ف : ع = ح : ب : ح$$$

### مسائل

(١) اذا فرضت  $ا ب ع$   $ب ث$  ثلاث نقط على منحنى قطع ناقص مركزه  $ح$  ورسم من نقطة  $ع$  موازى لـ  $ا ب$  يقطع  $ا ب$  قطعاً  $ح ب$   $ب د$  في تقطى  $ب د$   $د ع$  على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن  $ب د$  مواز لـ  $ا ب$  في نقطة  $ع$

(٢) اذا رسم المستقيمان  $ط ع$   $ط ب$  مماسين لقطع ناقص ورسم أى وتر مثل  $ا ب$  وفرضت نقطة  $ف$  منتصف جزء الوتر الواقع فى المنحنى وأن  $ب ف$  يقطع المنحنى فى نقطة  $ع$  فالمطلوب البرهنة على أن  $ع$   $ب$  مواز للمستقيم  $ب ط$

(٣) اذا فرض قطعان ناقصان متشابهان وفي وضعين متشابهين ورسم مستقيمان متوازيان بحيث يمس كل منهما منحنيًا فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين نقطتي التماس يمر بأحدى نقطتين ثابتتين

(٤) اذا فرض أن  $ع ع$   $ك د$  وكذلك  $ع ح$   $ك د$  زوجان من أقطار متزاوجة في قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمين  $ع ح$   $ك د$  موازيان للمستقيمين  $د ح$   $ك د$  على التناظر

(٥) اذا فرض انه من نقطتين ثابتتين على منحني قطع ناقص مثل نقطتي  $ا ب$  رسم الوتران المتوازيان  $ا ع$   $ب د$  فالمطلوب البرهنة على أن  $ع د$  يمس أيضا قطعاً ناقصاً مشابهاً للاول وفي وضع مشابه لوضع الأول

(٦) اذا فرض أن  $ا ب$  أي نقطتين وكان الوتر القطبي لنقطة  $ا$  بالنسبة لقطع ناقص معلوم يمر بنقطة  $ب$  ثم رسم من نقطة  $د$  التي هي منتصف  $ا ب$  تماس للقطع الناقص وليكن  $د ع$  وفرض أن  $د ح$   $ك د$  هما نصف القطرين الموازيين للمستقيمين  $ا ب$   $ك د$  فالمطلوب البرهنة على أن

$$ا ب : د ح = د ع : ح د$$

## الفصل السابع النسب التعاكسية والتضامن

الخواص التعاكسية للقطاعات المخروطية

١٣٥ - كل جملة من النقط على خط مستقيم تسمى صفا  
واذا مرت جملة مستقيمت بنقطة واحدة فانها تسمى حزمة ويسمى كل  
مستقيم من هذه المستقيمت شعاعا

اذا فرضت أربع نقط على مستقيم مثل ع ٦ ٧ ٨ ٩ فالنسبة  
 $\frac{ع ٧}{٧ ٨} : \frac{ع ٨}{٨ ٩}$  أو ع ٧ : ع ٨ :: ٧ ٨ : ٨ ٩ (مع ملاحظة اتجاهات  
المستقيمت كما تقدم في بند ٩٩) تسمى النسبة التعاكسية للصفا

ع ٦ ٧ ٨ ٩ ويرمز لها هكذا { ع ٧ ٨ ٩ }

١٣٦ - اذا قسم خط مستقيم مثل المستقيم ع ٨ في الداخل بنقطة  
مثل ٧ وفي الخارج بنقطة مثل ٩ بنسبة واحدة يقال انه قسم  
بنسبة توافقية

ويقال للنقطتين ع ٦ ٨ انهما متراوجتان تراوجا توافقيا بالنسبة  
للتقطتين ع ٦ ٨

وحينئذ فالتقط ع ٦ ٧ ٨ ٩ تكون صفا توافقيا متى كان  
 $ع ٧ : ع ٨ = ٧ ٨ : ع ٩$

أو ع ٧ : ع ٨ = ع ٩ : ع ٩

واذا فالنسبة التعاكسية لصفا توافقى تساوى ١ -

اذا كان { ع ٧ ٨ ٩ } = ١ يكون ع ٧ ٨ ٩ = ع ٩ ٨ ٧

∴ ع ٧ : ع ٨ = ع ٩ : ع ٩

واذا فيكون ع ٦ ٧ ٨ ٩ مكوّنة لمتوالية توافقية

واذا فرض أن  $\{ع\} = \{ع\}$  أو  $\{ع\} = \{ع\}$  وكانت  $ع$  هي منتصف  $ع$  يكون  
 $(ع + ع) - (ع - ع) = (ع + ع) - (ع - ع)$  ومنه يحدث  $ع = ع$   
 وكذلك إذا فرض أن  $ع$  و  $ع$  منتصف  $ع$  يكون  
 $ع = ع$  و  $ع = ع$

١٣٧ - يقتضى تعريف النسبة التعاكسية لاربع نقط على خط مستقيم أن تؤخذ النقط بترتيب مخصوص ومع ذلك فيستنتج من التعريف مباشرة أن

وبناء عليه فالنسبة التماكسية لاربع نقط لا تتغير اذا تبادلت أى نقطتين  
 في الوضع وتبادلت كذلك النقطتان الاخران

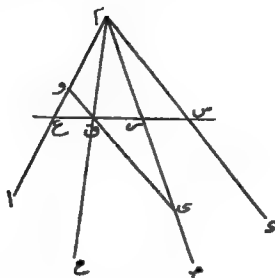
و بمقتضى الارتباط

$$\cdot = v \cdot u + u \cdot v + v \cdot v$$

الذى هو صحيح لجميع أوضاع  $6 \times 6 \times 6$  على مستقيم يمكن أن يرى أنه إذا كان  $\{c, d, e\} = 0$  تكون المقادير المختلفة للنسب التماكسية المتحصلة من أخذ النقاط الأربعة بكل ترتيب ممكن هي

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

١٣٨ - إذا قطع مستقيم حزمة مكونة من أربعة مستقيبات مثل  
 ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠ ١٠١ ١٠٢ ١٠٣ ١٠٤ ١٠٥ ١٠٦ ١٠٧ ١٠٨ ١٠٩ ١١٠ ١١١ ١١٢ ١١٣ ١١٤ ١١٥ ١١٦ ١١٧ ١١٨ ١١٩ ١٢٠ ١٢١ ١٢٢ ١٢٣ ١٢٤ ١٢٥ ١٢٦ ١٢٧ ١٢٨ ١٢٩ ١٣٠ ١٣١ ١٣٢ ١٣٣ ١٣٤ ١٣٥ ١٣٦ ١٣٧ ١٣٨ ١٣٩ ١٤٠ ١٤١ ١٤٢ ١٤٣ ١٤٤ ١٤٥ ١٤٦ ١٤٧ ١٤٨ ١٤٩ ١٥٠ ١٥١ ١٥٢ ١٥٣ ١٥٤ ١٥٥ ١٥٦ ١٥٧ ١٥٨ ١٥٩ ١٦٠ ١٦١ ١٦٢ ١٦٣ ١٦٤ ١٦٥ ١٦٦ ١٦٧ ١٦٨ ١٦٩ ١٧٠ ١٧١ ١٧٢ ١٧٣ ١٧٤ ١٧٥ ١٧٦ ١٧٧ ١٧٨ ١٧٩ ١٨٠ ١٨١ ١٨٢ ١٨٣ ١٨٤ ١٨٥ ١٨٦ ١٨٧ ١٨٨ ١٨٩ ١٩٠ ١٩١ ١٩٢ ١٩٣ ١٩٤ ١٩٥ ١٩٦ ١٩٧ ١٩٨ ١٩٩ ٢٠٠ ٢٠١ ٢٠٢ ٢٠٣ ٢٠٤ ٢٠٥ ٢٠٦ ٢٠٧ ٢٠٨ ٢٠٩ ٢١٠ ٢١١ ٢١٢ ٢١٣ ٢١٤ ٢١٥ ٢١٦ ٢١٧ ٢١٨ ٢١٩ ٢٢٠ ٢٢١ ٢٢٢ ٢٢٣ ٢٢٤ ٢٢٥ ٢٢٦ ٢٢٧ ٢٢٨ ٢٢٩ ٢٣٠ ٢٣١ ٢٣٢ ٢٣٣ ٢٣٤ ٢٣٥ ٢٣٦ ٢٣٧ ٢٣٨ ٢٣٩ ٢٤٠ ٢٤١ ٢٤٢ ٢٤٣ ٢٤٤ ٢٤٥ ٢٤٦ ٢٤٧ ٢٤٨ ٢٤٩ ٢٥٠ ٢٥١ ٢٥٢ ٢٥٣ ٢٥٤ ٢٥٥ ٢٥٦ ٢٥٧ ٢٥٨ ٢٥٩ ٢٦٠ ٢٦١ ٢٦٢ ٢٦٣ ٢٦٤ ٢٦٥ ٢٦٦ ٢٦٧ ٢٦٨ ٢٦٩ ٢٧٠ ٢٧١ ٢٧٢ ٢٧٣ ٢٧٤ ٢٧٥ ٢٧٦ ٢٧٧ ٢٧٨ ٢٧٩ ٢٨٠ ٢٨١ ٢٨٢ ٢٨٣ ٢٨٤ ٢٨٥ ٢٨٦ ٢٨٧ ٢٨٨ ٢٨٩ ٢٩٠ ٢٩١ ٢٩٢ ٢٩٣ ٢٩٤ ٢٩٥ ٢٩٦ ٢٩٧ ٢٩٨ ٢٩٩ ٣٠٠ ٣٠١ ٣٠٢ ٣٠٣ ٣٠٤ ٣٠٥ ٣٠٦ ٣٠٧ ٣٠٨ ٣٠٩ ٣١٠ ٣١١ ٣١٢ ٣١٣ ٣١٤ ٣١٥ ٣١٦ ٣١٧ ٣١٨ ٣١٩ ٣٢٠ ٣٢١ ٣٢٢ ٣٢٣ ٣٢٤ ٣٢٥ ٣٢٦ ٣٢٧ ٣٢٨ ٣٢٩ ٣٣٠ ٣٣١ ٣٣٢ ٣٣٣ ٣٣٤ ٣٣٥ ٣٣٦ ٣٣٧ ٣٣٨ ٣٣٩ ٣٤٠ ٣٤١ ٣٤٢ ٣٤٣ ٣٤٤ ٣٤٥ ٣٤٦ ٣٤٧ ٣٤٨ ٣٤٩ ٣٥٠ ٣٥١ ٣٥٢ ٣٥٣ ٣٥٤ ٣٥٥ ٣٥٦ ٣٥٧ ٣٥٨ ٣٥٩ ٣٦٠ ٣٦١ ٣٦٢ ٣٦٣ ٣٦٤ ٣٦٥ ٣٦٦ ٣٦٧ ٣٦٨ ٣٦٩ ٣٧٠ ٣٧١ ٣٧٢ ٣٧٣ ٣٧٤ ٣٧٥ ٣٧٦ ٣٧٧ ٣٧٨ ٣٧٩ ٣٨٠ ٣٨١ ٣٨٢ ٣٨٣ ٣٨٤ ٣٨٥ ٣٨٦ ٣٨٧ ٣٨٨ ٣٨٩ ٣٩٠ ٣٩١ ٣٩٢ ٣٩٣ ٣٩٤ ٣٩٥ ٣٩٦ ٣٩٧ ٣٩٨ ٣٩٩ ٤٠٠ ٤٠١ ٤٠٢ ٤٠٣ ٤٠٤ ٤٠٥ ٤٠٦ ٤٠٧ ٤٠٨ ٤٠٩ ٤١٠ ٤١١ ٤١٢ ٤١٣ ٤١٤ ٤١٥ ٤١٦ ٤١٧ ٤١٨ ٤١٩ ٤٢٠ ٤٢١ ٤٢٢ ٤٢٣ ٤٢٤ ٤٢٥ ٤٢٦ ٤٢٧ ٤٢٨ ٤٢٩ ٤٣٠ ٤٣١ ٤٣٢ ٤٣٣ ٤٣٤ ٤٣٥ ٤٣٦ ٤٣٧ ٤٣٨ ٤٣٩ ٤٤٠ ٤٤١ ٤٤٢ ٤٤٣ ٤٤٤ ٤٤٥ ٤٤٦ ٤٤٧ ٤٤٨ ٤٤٩ ٤٥٠ ٤٥١ ٤٥٢ ٤٥٣ ٤٥٤ ٤٥٥ ٤٥٦ ٤٥٧ ٤٥٨ ٤٥٩ ٤٦٠ ٤٦١ ٤٦٢ ٤٦٣ ٤٦٤ ٤٦٥ ٤٦٦ ٤٦٧ ٤٦٨ ٤٦٩ ٤٧٠ ٤٧١ ٤٧٢ ٤٧٣ ٤٧٤ ٤٧٥ ٤٧٦ ٤٧٧ ٤٧٨ ٤٧٩ ٤٨٠ ٤٨١ ٤٨٢ ٤٨٣ ٤٨٤ ٤٨٥ ٤٨٦ ٤٨٧ ٤٨٨ ٤٨٩ ٤٩٠ ٤٩١ ٤٩٢ ٤٩٣ ٤٩٤ ٤٩٥ ٤٩٦ ٤٩٧ ٤٩٨ ٤٩٩ ٥٠٠ ٥٠١ ٥٠٢ ٥٠٣ ٥٠٤ ٥٠٥ ٥٠٦ ٥٠٧ ٥٠٨ ٥٠٩ ٥١٠ ٥١١ ٥١٢ ٥١٣ ٥١٤ ٥١٥ ٥١٦ ٥١٧ ٥١٨ ٥١٩ ٥٢٠ ٥٢١ ٥٢٢ ٥٢٣ ٥٢٤ ٥٢٥ ٥٢٦ ٥٢٧ ٥٢٨ ٥٢٩ ٥٣٠ ٥٣١ ٥٣٢ ٥٣٣ ٥٣٤ ٥٣٥ ٥٣٦ ٥٣٧ ٥٣٨ ٥٣٩ ٥٤٠ ٥٤١ ٥٤٢ ٥٤٣ ٥٤٤ ٥٤٥ ٥٤٦ ٥٤٧ ٥٤٨ ٥٤٩ ٥٥٠ ٥٥١ ٥٥٢ ٥٥٣ ٥٥٤ ٥٥٥ ٥٥٦ ٥٥٧ ٥٥٨ ٥٥٩ ٥٦٠ ٥٦١ ٥٦٢ ٥٦٣ ٥٦٤ ٥٦٥ ٥٦٦ ٥٦٧ ٥٦٨ ٥٦٩ ٥٧٠ ٥٧١ ٥٧٢ ٥٧٣ ٥٧٤ ٥٧٥ ٥٧٦ ٥٧٧ ٥٧٨ ٥٧٩ ٥٨٠ ٥٨١ ٥٨٢ ٥٨٣ ٥٨٤ ٥٨٥ ٥٨٦ ٥٨٧ ٥٨٨ ٥٨٩ ٥٩٠ ٥٩١ ٥٩٢ ٥٩٣ ٥٩٤ ٥٩٥ ٥٩٦ ٥٩٧ ٥٩٨ ٥٩٩ ٦٠٠ ٦٠١ ٦٠٢ ٦٠٣ ٦٠٤ ٦٠٥ ٦٠٦ ٦٠٧ ٦٠٨ ٦٠٩ ٦١٠ ٦١١ ٦١٢



فیکون  
ع : ق = ع : م  
م : ی = م : ق

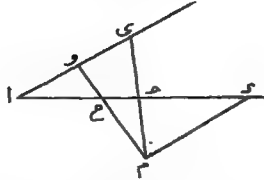
$$\therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$$

وواضح أن  $u$  و  $v$  :  $y$  ثابت لجميع أوضاع  $u$  وإذا  $\{x, y, z\}$  ثابت لجميع أوضاع وجميع اتجاهات المستقيم القاطع

تعريف - النسبة التعاكسية لحزمة ذات أربعة مستقيقات مثل  
 $m \ 26 \ 1 \ 26 \ 2 \ 6$  هي النسبة التعاكسية للصف الكون من قطع  
المستقيقات بأي قاطع ويرمز لها هكذا  $\{m \ 26 \ 1 \ 26 \ 2 \ 6\}$

(مسألة ١) إذا فرضت ثلاث نقط على خط مستقيم فالمطلوب إيجاد نقطة رابعة عليه بحيث يكون الصف المكون ذا نسبة تماكسية معلومة

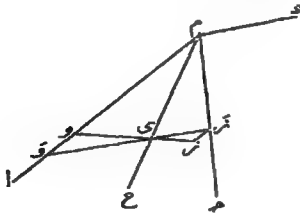
لنفرض أن  $a \neq b \neq c$  هي النقط الثلاث المفروضة ونرسم من نقطة  $a$  مستقيما حيثما اتفق مثل  $a$  و  $b$  ونفرض عليه تقطعي و  $b$  و  $c$  بحيث تكون  $a$  و  $b$  و  $c$  مساوية للنفسه التعاكسية المعلومة



ثم نفرض أن و ح 6 ي ح يتقاطعان في نقطة م ونرسم من م موازيا للمستقيم ا و ي فيقطع ا ح 6 في د فتكون د هي النقطة المطلوبة لان  $1 \text{ ا } 2 \text{ ح } 6 \text{ ي} = 1 \text{ ا } 2 \text{ و } 3 \text{ ي} = 1 \text{ ا } 2 \text{ و } 3 \text{ ي}$  و

(مسألة ٢) - اذا علمت ثلاثة مستقيمت متقاطعة في نقطة واحدة فالمطلوب إيجاد مستقيم رابع يمر بهذه النقطة بحيث تكون الخزمة المكونة ذات نسبة تعاكسية معلومة

لنفرض أن م 6 ا م 6 2 م 6 م ح هي المستقيمات المعلومة . ثم نرسم مستقيما يقطع م ا في نقطة و ويقطع م 2 في نقطة ي ونفرض نقطة على هذا المستقيم مثل نقطة ن بحيث تكون و ي : ن ي مساوية للنسبة التعاكسية المعلومة . ثم نرسم من نقطة ن موازيا للمستقيم م ا فيقطع م ح في ن' ونفرض أن ن' ي يقطع م ا في نقطة و'

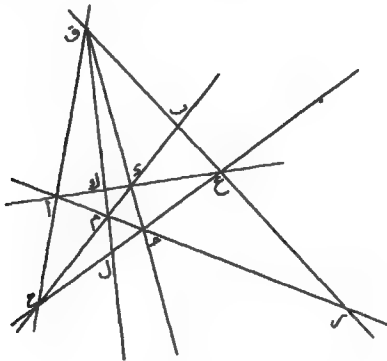


لنفرض أن  $u, v, w, x, y, z$  هي أضلاع الشكل الرباعي ومعلوم أن المستقيم الواصل بين نقطة تقاطع أي ضلعين من هذه



الاضلاع بنقطة تقاطع الضلعين الآخرين يسمى قطرا للشكل الرباعي المذكور  
واذا فتوجد ثلاثة أقطار وهي ع د ٦ ا ٦ ح ٦ ك كما في الشكل الآتي  
وعلينا أن نثبت أن

$$\begin{aligned} ١ - &= \{٢ ح ٦ ك\} = \{٢ د ٦ ا\} = \{٢ ا ٦ ح\} \\ &\text{ثم نفرض أن د ٦ ا يقطع ا ٦ ك ويقطع ح ٦ ك في ل} \\ &\text{فيكون } \{٢ ا ٦ ح\} = \{٢ ا ٦ ح\} \text{ د ٦ ا} = \{٢ ا ٦ ح\} = \{٢ ا ٦ ك\} \\ &\{٢ ا ٦ ك\} = \{٢ ا ٦ ك\} = \{٢ ا ٦ ك\} \\ &\{٢ ا ٦ ك\} = \{٢ ا ٦ ك\} = \{٢ ا ٦ ك\} \end{aligned}$$



وحيث ان  $\{٢ ا ٦ ح\} = \{٢ ا ٦ ك\}$  فيكون

$$١ \pm = \{٢ ا ٦ ح\} \therefore \frac{٢ ا}{٢ ح} = \frac{٢ ا}{٢ ك}$$

ويجب أن نأخذ الجواب المقرون بعلامة السلب لأنه واضح أن اثنين من  
الاشعة ينطبقان اذا كانت النسبة التعاكسية للحزمة تساوى ١ +

واذا فاقطر  $\alpha$  منقسم بنسبة توافقية ويمكن بمثل هذه الطريقة البرهنة على أن القطرين الآخرين منقسمان بنسبة توافقية أيضا  
[ولو أردت برهاناً آخر فراجع هندسة اقليدس لسميت وبرانت صحيفة ٢٩٣]

### التضامن

١٣٩ - تعريف - اذا فرضت جملة أزواج من نقط على خط مستقيم مثل النقط  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  بحيث تكون ابعادها عن نقطة ثابتة على هذا المستقيم مثل نقطة  $\epsilon$  مكوّنة للارتباط الآتى وهو  
$$\epsilon\alpha \cdot \epsilon\gamma = \epsilon\beta \cdot \epsilon\delta = \epsilon\epsilon = 0$$

فان هذه النقط تكون صفا متضامنا وتسمى نقطة  $\epsilon$  مركز التضامن وكل نقطتين متناظرتين مثل  $\alpha, \beta$  يقال لهما متزاوجتان وتكون النقطة المزوجة للمركز على بعد لانهاى

واذا كانت كل نقطة والنقطة المزوجة لها في جهة واحدة بالنسبة للمركز فانه يوجد نقطتان أخريان مثل نقطتي  $\alpha, \beta$  في جهتين متقابلتين من المركز ويكون وضعهما موفيا للتساويات الآتية  $\epsilon\alpha = \epsilon\beta = \epsilon\gamma = \epsilon\delta$  ويقال للنقطتين  $\alpha, \beta$  نقطتان مضاعفتان أو بورتان

واذا كانت النقطتان المتزاوجتان في جهتين متقابلتين بالنسبة للمركز تكون النقطتان المضاعفتان تخيليتين

١٤٠ - يتعين الصنف (المتضامن) تماما اذا علم منه زوجان من النقط المتزاوجة

لأننا اذا رسمنا أى دائرتين ماريتين بالنقط  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  على التناظر فان المحور الاصلى للدائرتين يقطع المستقيم  $\alpha\beta\gamma\delta$  في نقطة مثل نقطة  $\epsilon$  بحيث يكون  $\epsilon\alpha \cdot \epsilon\gamma = \epsilon\beta \cdot \epsilon\delta$  نقطة واحدة موفية لهذا الشرط

١٤١ - اذا كانت جملة نقط مكوّنة لصنف (متضامن) فان النسبة

التعاكسية لاي أربع نقط تساوى النسبة التعاكسية للنقط الأربع المزوجة لها

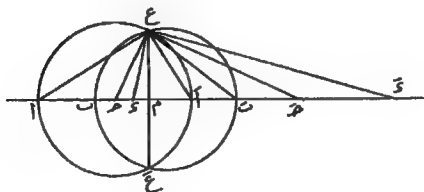
ثم نفرض أن المحور الأصلي للدائرتين المرسوميتين على  $61$   $62$  باعتبارهما قطرين يقطع المستقيم  $ab$  في نقطة  $m$  فتكون نقطة  $m$  هي مركز التضامن

وإذا تقاطعت الدائرتان المذكورتان في نقطتين حقيقيتين مثل  $ع ٦ ع ٦$  تكون الزاويتان  $ا ٦ ب ٦ ع ٦$  قائمتين وتكون كذلك الزاوية  $ا ٦ ب ٦ ع ٦$  قائمة وبناء عليه يكون

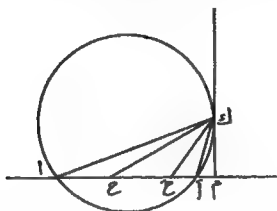
وإذا تكون الزاويتان  $\alpha$  و  $\beta$  قائمتين أيضا

وحيث أن الزاويتان  $\alpha$  و  $\beta$  متساويتان وكذلك الزاويتان  $\gamma$  و  $\delta$  متساويتان والزاويتان  $\epsilon$  و  $\zeta$  متساويتان أيضا وإذا وصلنا نقطة  $\epsilon$  بالنقط الأربع  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$  و  $\delta$  تكون زوايا هذه الخزمة مساوية لزوايا الخزمة المكوّنة من وصل نقطة  $\epsilon$  بالنقط الأربع  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$  و  $\delta$  ومنه ينتج أن

$$\{s \circ u\} \varepsilon = \{s \circ u\} \varepsilon$$



وإذا فرض أن الدائرتين اللتين قطراهما  $\Gamma\Delta$   $\Gamma\Theta$  لا يتقاطعا  
في نقطتين حقيقيتين أى عند ما تكون النقطتان المتراوجتان في جهة واحدة  
بالنسبة للركز  $\Sigma$  نرسم دائرة مارة بنقطتي  $\Gamma\Delta$  بحيث تماس العمود المقام  
من نقطة  $\Sigma$  على  $\Gamma\Delta$  ونفرض أن  $\Delta$  هي نقطة التماس



وحيث أن  $\Sigma\Delta = \Sigma\Gamma = \Sigma\Theta$  فيستنتج من ذلك  
أن  $\Sigma\Delta$  يمس في نقطة  $\Delta$  دائرة مارة بنقطتي  $\Gamma\Delta$  ويكون الامر كذلك  
بالنسبة للزوج الاخرى من النقط

وبناء عليه فالزاويتان  $\Sigma\Delta\Gamma$   $\Sigma\Delta\Theta$  متساويتان وكذلك الزاويتان  
 $\Sigma\Delta\Gamma$   $\Sigma\Delta\Theta$  متساويتان وإذا فالزاويتان  $\Gamma\Delta\Theta$   $\Gamma\Delta\Theta$  متساويتان

وإذا فزوايا الخزمة المكونة من وصل نقطة  $\Delta$  بالنقط  $\Gamma\Delta\Theta$  مساوية  
لزوايا الخزمة المكونة من وصل نقطة  $\Delta$  بالنقط  $\Gamma\Delta\Theta$  وإذا فالنسبتان التماكسيتان للخزمتين متساويتان

ويجب أن نلاحظ أنه قد ثبت ضمنا أنه اذا كان زوجان من النقط  
المتراوحة في صف متضامن يقابلان زاوية قائمة رأسها أى نقطة ما فان كل  
زوج آخر من هذه النقط يقابل زاوية قائمة رأسها هذه النقطة

نتيجة ١ - يمكن الحصول مما تقدم على شرط لازم وكاف لان تكون ثلاثة أزواج من نقط مكوّنة لصف متضامن وهو

$$\{1 \hat{ } 6 \hat{ } 7\} = \{1 \hat{ } 7 \hat{ } 6\}$$

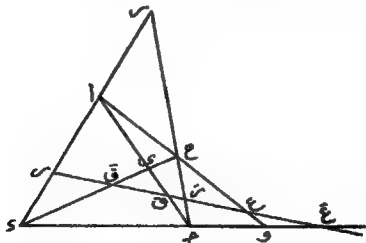
نتيجة ٢ - أى زوج من النقط المتراوجة فى صف متضامن يكون مع النقطتين المضاعفتين صفاً توافقياً

لأنه اذا كانت النقط المضاعفة  $ك ٦$  و  $ك ٦$  والنقط  $٦ ٦$  زوجين من النقط المتراوجة يكون

$$\{1 \hat{ } ٦ \hat{ } ٦\} = \{٦ \hat{ } ٦ \hat{ } ٦\}$$

(مسئلة ١) المطلوب البرهنة على أنه فى كل شكل رباعى أى مستقيم يقطع الثلاثة الأزواج من الاضلاع المتقابلة فى ثلاثة أزواج من نقط مكوّنة لصف متضامن

نفرض  $٦ ٦ ٦ ٦$  رؤوس الشكل الرباعى المفروض وأن  $٦ ٦ ٦ ٦$  يتقابلان فى نقطة و وأن  $٦ ٦ ٦ ٦$  يتقابلان فى نقطة  $٦$  و  $٦ ٦ ٦ ٦$  يتقابلان فى نقطة  $٦$  ثم نفرض أن مستقيماً يقطع هذه الأزواج من الاضلاع المتقابلة فى  $٦ ٦$  وفى  $٦ ٦$  وفى  $٦ ٦$ .



فيكون  $\{ع٢ع١\} = \{ع٢ع١\}$

$\{و٢و١\} =$

$\{و٢و١\} =$

$\{ع٢ع١\} = \{ع٢ع١\}$

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن الأزواج الثلاثة من المستقيمت المرسومة من نقطة ما الى نهايات الاقطار الثلاثة لاي شكل رباعي تكون متضامنة

١٤٢ - تعريف - اذا وصلت جملة أزواج من نقط متضامنة

بنقطة ما مثل نقطة م فانه ينشأ من ذلك حزمة تسمى حزمة متضامنة لنفرض ا و ب و ج ح و د ... الخ أزواجا من نقط متضامنة ونفرض أن الحزمة المكونة من وصل هذه النقط بنقطة م يقطعها أى قاطع آخر في الأزواج الآتية من النقط ا و ب و ج ح و د ... الخ

فحيث ان ا و ب و ج ح و د ... الخ هي أزواج من نقط متضامنة فتحدث الارتباطات الآتية

$$\{ا١ب١\} = \{ا١ب١\}$$

$$\{ا١ب١\} = \{ا١ب١\} \quad \text{لكن}$$

$$\{ا١ب١\} = \{ا١ب١\} \quad ٦$$

ومن ذلك ينتج  $\{ا١ب١\} = \{ا١ب١\}$  الخ

ومنه ينتج أن ا و ب و ج ح و د ... الخ هي أزواج من نقط متضامنة

فيتضح اذا أنه اذا قطع مستقيم حزمة في أزواج من نقط متضامنة فان هذه الحزمة يقطعها أى مستقيم آخر في أزواج من نقط متضامنة

نتيجة ١ - الأزواج من المستقيمات المتعامدة والمارة بنقطة واحدة  
يقطعها خط مستقيم في صف تضامن

نتيجة ٢ - الأزواج من الاقطار المتوازية في قطاع مخروطي هي  
متضامنة

لأننا نعلم أن الأزواج من الاقطار المتوازية في قطاع مخروطي يقطعها أى مماس في أزواج من نقط متضامنة ونقطة تماس هذا المماس هي مركز التضامن [ بمقتضى بند ١٠٥ ] وإذا فالأزواج من الاقطار المتوازية يقطعها أى مستقيم في أزواج من النقط المتضامنة والخطان التقريبان لهذا القطاع هما الخطان المضاعفان لهذا التضامن

### الخواص التعاكسية للقطاعات المخروطية

١٤٣ - النسبة التعاكسية للحزمة المكوّنة من وصل أى نقطة من نقط منحنى قطاع مخروطي بأربع نقط ثابتة هي ثابتة ومساوية للنسبة العكسية للصف المكوّن من قطع مماسات المنحنى في هذه النقط بأى مماس آخر

لنفرض  $a, b, c, d$  أربع نقط ثابتة على منحنى قطاع مخروطي  
بورته  $b$

ولنفرض  $e$  أى نقطة أخرى على المنحنى ثم نفرض أن الخطوط  $e, a, b, c, d$  تقطع الدليل المناظر للبورة  $b$  في  $a, b, c, d, e$  على التناظر ونمد  $e$  على استقامته الى  $f$  ومن المعلوم أن  $b$  منتصف للزاوية  $e, b, a$  أو الزاوية  $a, b, c$  بحسب ما اذا كانت  $e, a, b$  على فرعين متقابلين من المنحنى أو على فرع واحد منه

ولكن  $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} \cup$

$$\{s, p, e, i\} e =$$

$$\{s, z, t\} \varepsilon =$$

ثم نفرض ان المماس في نقطة ع يقطع المماسات المرسومة من  
 ا ب ج د في ا' ب' ج' د' على التناظر



فن المعلوم بمقتضى بند ١٧ أن  $ب \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦$  كلها  
أعمدة على  $ب \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦$  على التناظر وحيث يكون

$$ب \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ = (٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦)$$

$$ومنه يخلت  $\{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\} = \{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\}$$$

$$\{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\} = \{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\} =$$

$$\{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\} =$$

١٤٤ - يمكننا بواسطة النظرية السابقة رسم منحنى قطاع مخروطي  
بمرئحس نقط معلومة أو بمس خمسة مستقيمت معلومة

إذا فرضنا  $٦$  نقطة على المنحنى قريبة من نقطة  $٦$  اقربا لانهائيا يكون

$$\{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\} = \{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\}$$

وإذا فتعلم النسبة العكسية للزمة  $\{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\}$

وإذا قفى النهاية تنطبق الخطوط  $٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦$  على  $٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦$   
على التناظر وحيث فالماس في نقطة  $٦$  هو المستقيم أو المرسوم من نقطة  $٦$   
بحيث يكون  $\{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\} = \{٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦\}$  وإذا فيمكننا رسم مماسات  
المنحنى في النقط  $٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦$  [أنظر بند ١٥٤]

وإذا فرض أن الماسين في نقطتي  $٦ \ ٦$  يتقاطعان في نقطة  $٦$  فإن المستقيم  
الواصل بين  $٦ \ ٦$  التي هي منتصف  $٦ \ ٦$  يمر بمركز المنحنى

وكذلك إذا فرض أن الماسين في نقطتي  $٦ \ ٦$  يتقاطعان في  $٦$  فإن  
المستقيم الواصل بين  $٦ \ ٦$  التي هي منتصف  $٦ \ ٦$  يمر بمركز المنحنى وإذا  
فقد تعين المركز

وإذا فرض أن  $m$  هي مركز المنحنى ورسمنا من  $m$  موازيا للمستقيم  $a$  ليقطع في نقطة  $p$  اللامس المرسوم من نقطة  $c$  فبما أن  $m$  و  $6$  و  $ط$  قطران متواجان فلو كانت التقطعان و  $6$  و  $ط$  في جهتين متقابلتين بالنسبة الى  $c$  يلزم أن يكون المنحنى قطعاً ناقصاً ويكون مربع القطر المزاوج للقطر  $m$  مساوياً و  $c . ط$  [بمقتضى بند ٧٠] وإذا كانت و  $6$  و  $ط$  في جهة واحدة من نقطة  $c$  يلزم أن يكون المنحنى قطعاً زائداً ويكون الخطان التقريبيان قاطعين للامس المرسوم من نقطة  $c$  في نقطتي  $ل$  و  $ل'$  بحيث يكون

$$[105] \text{ بمقتضى بند } 105$$

ففي الحالة الاولى معلوم لنا زوج من الاقطار المتزاوجة في قطع ناقص ومعلوم  
وصفهما وطولهما ويمكن ايجاد المحاور وباقي الخطوط كما تقدم في بند ٧٥  
وفي الحالة الثانية معلوم لنا الخطان التقربيان ومماس ويمكن ايجاد المحاور  
وباقي الخطوط كما في بند ١١١

ولنفرض  $a \in G \setminus H$  ونفرض أن  $a$  هو العنصر الذي يقطع  
 $H$  في  $L$   $a \in H$  وكذلك نفرض أن  $a \in H$  يقطع  
 $H$  في  $K$

فإذا فرض أن  $\Gamma$  حـ مماس لمنطبق تقريبا على  $\alpha$  وأن هذا المماس  
يقطع المماسات  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\delta$   $\epsilon$   $\zeta$   $\eta$   $\theta$  في النقط  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\delta$   $\epsilon$   $\zeta$   $\eta$   $\theta$   
على التناظر فإنه يحدث  $\{\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta\} = \{1 2 3 4 5 6 7 8\}$

ولنفرض أن  $\alpha$  يحرك في جهة  $\alpha$  حتى ينطبق عليه فينتج أن  $\alpha$  يحرك وتنطبق على  $\alpha$  وتنطبق  $\alpha$  على  $\alpha$  على  $\alpha$  ف على نقطة تماس المماس  $\alpha$

وحيلث يكون  $\{ا ف ع ك\} = \{ل ه د و\}$

وحيث ان النسبة التعاكسية للصف  $ا ب 6 ف 6 ح 6 ك$  معلومة ومعلوم منه ثلاث نقط فيمكن بالسهولة معرفة النقطة الرابعة التي هي نقطة تماس المماس  $ا ح$  وحيث علمت نقط التماس للمماسات الخمسة فيمكن تقيم رسم المنحنى كما في الحالة المتقدمة

وواضح من الرسم المتقدم أنه يمكن رسم منحن واحد فقط يمر بخمس نقط معلومة بشرط أن لا تكون أربع من هذه النقط الخمسة واثمة على خط مستقيم وواضح أيضا أنه يمكن رسم منحن واحد فقط يمر بخمس مستقيمت معلومة بشرط أن لا تمر أربعة من هذه المستقيمت بنقطة واحدة

١٤٥ - المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون الحزمة المكوّنة من وصلها بأربع نقط ثابتة وليست على خط مستقيم ذات نسبة تعاكسية ثابتة هو منحنى قطاع مخروطي يمر بالنقط الاربعة المعلومة

لنفرض  $ا ب 6 ب 6 د 6 د ه$  هي النقط الاربعة المعلومة وأن  $6 و 6 اى$  نقطتين موفيتين للارتباط الآتى

$$\{ا ب 6 د\} = \{و 6 ا ب 6 د\}$$

فواضح من البند السابق أنه يمكن رسم منحن واحد فقط يمر بخمس نقط بشرط أن لا يكون أربع منها على خط مستقيم

فاذا فرض أن  $و$  ليست على المنحنى الذى تعينه النقط الخمسة  $ا ب 6 ب 6 د 6 د ه$  فلنفرض اذا أن  $و$  يقطع المنحنى فى نقطة مثل  $س$  وحيث ان  $س$  واقعة على المنحنى المار بالنقط  $ا ب 6 ب 6 د 6 د ه$

$$س \{ا ب 6 د\} = ع \{ا ب 6 د\}$$

$$و \{ا ب 6 د\} =$$

ومنه ينتج أن  $ب \neq د$  و يلزم أن تكون واقعة على خط مستقيم وكذلك يمكن اثبات أن  $ا \neq ب$  واقعة على خط مستقيم [ بمقتضى بند ١٣٨ مسألة ٤ ]

وبناء عليه يلزم أن تكون النقطتان  $د$  و  $ب$  منطبقتين لأنه مفروض أن  $ا \neq ب \neq د$  و ليست على خط مستقيم وبذا يثبت المطلوب

١٤٦ - غلاف المستقيم الذى يقطع أربعة مستقيمت ثابتة وغير مازة بنقطة واحدة يكون صفا ذا نسبة تعاكسية ثابتة هو قطاع مخروطى مماس للمستقيمت الاربعة الثابتة

لنفرض أن المستقيمت الاربعة يقطعها مستقيمان آخران فى النقط الآتية  
 $ع \quad د \quad ب \quad ا$  و  $ف \quad ح \quad ز \quad س$  على التناظر  
 فمن المعلوم أن قطاعا مخروطيا واحدا فقط يمكن أن يمس المستقيمت الاربعة الثابتة ويمس المستقيم  $ع \quad د$  و  $ا$  وإذا فرضنا أن  $ع \quad د \quad ز \quad س$  لا يمس هذا المنحنى نرمس مماسا آخره من نقطة  $س$  ولنفرض أن هذا المماس يقطع  $ع \quad د$  و  $ب \quad ا$  و  $ز \quad س$  فى  $ك \quad ل \quad م$  على التناظر  
 فيبقتضى بند ١٤٣ يحدث

$$\{ ا \quad ل \quad م \quad س \} = \{ ع \quad د \quad ز \quad س \}$$

$$\{ ع \quad د \quad ز \quad س \} =$$

ومنه ينتج أن  $ع \quad ك \quad ل \quad د$  و  $ا \quad م \quad ب$  تتقاطع فى نقطة واحدة وكذلك يمكن البرهنة على أن  $ع \quad ح \quad ز \quad د$  و  $ا \quad س \quad ب$  تتقاطع فى نقطة واحدة [ أنظر بند ١٣٨ مسألة ٣ ]

وحيث ان المستقيمت الاربعة المفروضة لالتقاطع فى نقطة واحدة فيلزم أن يكون المستقيمان  $ع \quad د$  و  $ا \quad ب$  و  $ك \quad ل \quad م$  منطبقين

١٤٧ - اذا رسم أى وتر لمنحنى قطاع مخروطى من نقطة ثابتة مثل م فان المنحنى والمحور القطبى لنقطة م يقسمانه بنسبة توافقية

اذا كانت م خارج المنحنى يكون المحور القطبى لنقطة م قاطعا للمنحنى ولنفرض أن ا ٦ ب هما نقطتا التقاطع ونرسم من نقطة م وترا يقطع المنحنى فى نقطتى ن ٦ و ٦ و يقطع المحور القطبى لنقطة م فى ف ونفرض أن المماسين فى نقطتى ن ٦ و ٦ يتقاطعان فى نقطة ط

فاذا فرضت ا ٦ ب نقطتين من نقط المنحنى قريبتين جدا من ا ٦ ب على التناظر يحدث

$$\{ \tau \beta \alpha \} = \{ \tau \beta \alpha \} \tau$$

واذا تحركت النقطتان ا ٦ ب فى جهة ا ٦ ب حتى انطبقتا عليهما فى النهاية فان الحزمتين المتقدمتين يقطعهما فى النهاية المستقيم م ن ف و ويكون الصنفين { م ن ف و } { ٦ } { ف ن م و } على التناظر واذا يكون

$$\{ \tau \beta \alpha \} = \{ \tau \beta \alpha \}$$

ومن ذلك يستنتج أن و م متقسم بنسبة توافقية فى نقطتى م ٦ ف

وحيث ان م ط هو القطبى للنقطة الداخلية ف فالنظرية صحيحة لأى نقطة سواء كانت خارجة أو داخلية

وبالعكس اذا رسم خط مار بأى نقطة مثل م قاطعا لقطاع مخروطى فى نقطتى ن ٦ و ٦ ثم أخذت نقطة على هذا المستقيم مثل نقطة ف بحيث يكون { م ن ف و } = ١ تكون نقطة ف واقعة على المحور القطبى لنقطة م بالنسبة لهذا المنحنى

لنفرض  $ا ب ج د$  أربع نقط على خط مستقيم فالمحاور القطبية  
لهذه النقط بالنسبة لأى منحن تمر جميعها بقطب المستقيم  $ا ب ج د$  بالنسبة  
لهذا المنحنى [بمقتضى بند ١١٢ أو بند ١٢٤]

$\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \} \text{ سه} = \{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \} \text{ سه}$   
 $\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \} \text{ سه} = \{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \} \text{ سه} = \{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \} \text{ سه}$   
 $\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \} \text{ سه} = \{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \} \text{ سه}$

وأزواج المستقيمتين المتراوجة بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطي والمآزة بنقطة واحدة هي متضامنة والمماسان للمنحنى من هذه النقطة هما المستقيمان المضاعفان لهذا التضامن

نفرض  $ع ا ٦ ٦ ع ا$  وكذلك  $ع ب ٦ ٦ ع ب$  الخ = جملة أزواج من الخطوط المتراوجة بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطي

ولنفرض أن المحور القطبي لنقطة  $ع$  بالنسبة للمنحنى يقطع  $ع ا ٦ ٦ ع ب$   $ع ب ٦ ٦ ع ا$  في النقط  $ا ٦ ٦ ب$   $ب ٦ ٦ ا$  على التناظر فتكون  $ا$  هي قطب  $ع ا$  لأنه مفروض أن قطب  $ع ا$  واقع على  $ع ا$  ويلزم أن يكون على المحور القطبي لنقطة  $ع$  أيضا وإذا فالتقط  $ا ٦ ٦ ب$   $ب ٦ ٦ ا$  هي أقطاب  $ع ا ٦ ٦ ع ب$   $ع ب ٦ ٦ ع ا$  وعلى التناظر وكذلك تكون  $ا ٦ ٦ ب$   $ب ٦ ٦ ا$  هي أقطاب المستقيمتين  $ع ا ٦ ٦ ع ب$  ...

وحينئذ بمقتضى البند المتقدم يكون

$$\{ع ا ٦ ٦ ع ب\} = \{ا ٦ ٦ ب\} = \{ب ٦ ٦ ا\}$$

ومنه ينتج ( بمقتضى بند ١٤١ ) أن  $ع ا ٦ ٦ ع ب$  وكذلك  $ع ب ٦ ٦ ع ا$  وكذلك  $ع ب ٦ ٦ ع ا$  الخ هي أزواج من المستقيمت المتضامنة

وواضح أن المماسين المرسومين من  $ع$  هما الخطان المضاعفان لهذا التضامن ويمكن البرهنة بمثل هذه الطريقة على أن الأزواج من النقط المتراوجة على خط مستقيم هي متضامنة وأن تقاطع المستقيم بالمنحنى هما

النقطتان المضاعفتان لهذا التضامن

(مسألة ١) من نقطة ما مثل نقطة  $ع$  على منحنى قطاع مخروطي رسم الوتران  $ع ب ٦ ٦ ع ا$  بحيث يصنعان زاويتين متساويتين مع المماس في نقطة  $ع$  والمطلوب البرهنة على أن  $ب ٦ ٦ ا$  يمر بنقطة ثابتة

نفرض أن  $ب ٦ ٦ ا$  يقطع في نقطة  $ط$  المماس في نقطة  $ع$  ولنفرض أن المحور القطبي لنقطة  $ط$  يقطع  $ب ٦ ٦ ا$  في  $ف$  فيكون الصف  $ط ب ٦ ٦ ف$  صفا

توافقيا ويكون ط ع منصفًا للزاوية الخارجة الواقعة بين ع ن ٦ ع و  
ومن ذلك ينتج أن ع ف منتصف للزاوية ن ع و أي أن ع ف هو  
العمودى فى نقطة ع وحيث فتكون ط نقطة ثابتة أى أنها هى قطب الوتر  
العمودى فى نقطة ع

(مسألة ٢) جميع القطاعات المخروطية المأزة بأربع نقط معلومة تشتمل  
على مثلث مشترك تكون رؤوسه أقطاب أضلاعه

لنفرض أن ١ ٦ ٢ ٣ ٤ هى النقط الاربعة المعلومة (أنظر الشكل  
الآخر من بند ١٣٨)

وحيث ان  $\{ ٢ ٣ ٤ \} = ١$  فتكون ب واقعة على المحور القطبى  
لنقطة ٢ بالنسبة لأى واحد من هذه المنحنيات

وكذلك تكون نقطة ٤ على المحور القطبى لنقطة ٢ بالنسبة لأى منحن  
من هذه المنحنيات

وحيث فتكون نقطة ٢ هى قطب الخط ب ٤

ثم حيث ان  $\{ ١ ٢ ٣ \} = ٤$  فتكون نقطة ك واقعة على المحور  
القطبى لنقطة ٣ بالنسبة لأى واحد من هذه المنحنيات

وذلك تكون نقطة ل واقعة على المحور القطبى لنقطة ٣

وحيث فنقطة ع هى قطب المستقيم ل م ك ن بالنسبة لأى منحن من  
هذه المنحنيات وحيث ان المحورين القطبيين لنقطتي ٢ ٦ ع يتران بنقطة ن  
فيلزم أن تكون ن هى قطب المستقيم م ع

وحيث فكل رأس من رؤوس المثلث م ع ن هى قطب الضلع المقابل  
لها بالنسبة لأى منحن من المنحنيات المأزة بالنقط الاربعة ١ ٦ ٢ ٣ ٤



لنفرض  $1 \leq 6 \leq 6 \leq 6 \leq 6$  هي المستقيمت الاربعة المعلومة  
(الشكل الاخير من بند ١٣٨)

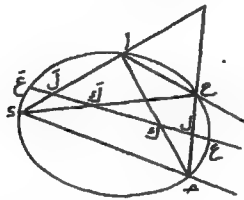
$$\{s|z\}^* = 1 - \{s\bar{z}\}^*$$

وحيث أن نقطة  $b$  هي قطب  $a$  بالنسبة لأي منحني من هذه المنحنيات وكذلك تكون نقطة  $c$  قطب المستقيم  $z$  ونقطة  $m$  قطب المستقيم  $e$  و

وحيث أن المستقيم الواصل بين أي نقطتي تماس في أي منحني من المنحنيات يمر برأس من رؤوس المثلث  $ABC$ ،

يقطعها أى مستقيم فى أزواج من نقط متضامنة

نفرض  $ا ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  هي النقط الاربعة المعلومة وأن خطا مستقيما  
يقطع  $ا ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  في  $ك ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  على التناظر ويقطع  $ا ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  في  $ل ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$   
على التناظر ثم نفرض أن هذا المستقيم يقطع أى منحني من المنحنيات المأزقة  
بالنقط الاربعة في  $ع ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  على التناظر



فيث ان النقط الستة واقعة على منحني واحد فيكون

$$\{ا ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦\} = \{ع ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦\}$$

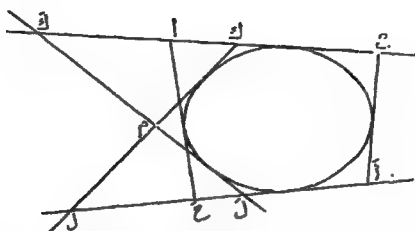
فن الصفوف المكونة من هذه الحزم على المستقيم  $ع ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  يحدث

$$\{ع ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦\} = \{ع ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦\}$$

$$\therefore \{ع ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦\} = \{ع ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦\}$$

ومن ذلك يتضح أن  $ع ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  هما نقطتان متراوجتان في التضامن الذي  
يعينه الزوجان  $ك ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  و  $ل ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$

١٥١ - أزواج المماسات المرسومة من نقطة ما لجملة منحنيات قطاعات  
مخروطية مماسة لاربعة مستقيمت معلومة هي متضامنة لنفرض أن الاربعة  
المستقيمت المعلومة هي  $ا ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  وأن المماسين  
المرسومين من  $م$  لاحد المنحنيات يقطعان  $ا ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  في  $ك ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$  ويقطعان  $ا ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$   
في  $ل ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦$



يكون  $\{ع ك ا ك\} = \{ل ع ل\}$

وحيث أن يكون  $\{m\} \in \{k, k^*\} = \{l, l^*\}$

$$\{ \bar{A} \bar{B} A B \} \rho =$$
$$\{ \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \}^m = \{ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \}^m \quad \therefore$$

ومن ذلك يتضح أن م ك 6 م ك شعاان متزواجان في التضامن الذي يعينه الزوجان م ا م ٦ م ٢ م ٣

(مسئلة ١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز منحنيات القواطع المخروطية المأزة بأربع نقط معلومة هو قطاع مخروطى

لنفرض  $a, b, c, d$  هي النقط الاربعة المعلومة وان  $e, f, g, h$  هي منتصفات  $ab, bc, cd, da$  على التناظر

ولنفرض  $M$  مركز منحنى قطاع مخروطي ماز بالنقط الأربعة وان  $M$  ع  
 $6M, 6M, 6M$  من خطوط موازية للمستقيات  $ab, 6b, 6c, 6d$   
 $6a$  أعلى التناظر فيكون  $6M, 6M$  ع قطرين متوازيين في المنحنى ويكون

من المعلوم [بمقتضى بند ١٥١] أن المحاسن المرسومة لهذه القطاعات المارة بنقطة ما هي أزواج من مستقيمت متضامنة فإذا فرض أن  $M$  نقطة تقاطع أى دائرتين من دوائر الاستدلال يكون زوجان من الأشعة المتزاوجة من حزمة التضامن متعامدين [وبمقتضى بند ١٤١] يكون كل زوج من الأشعة متعامدا وإذا فتقطة  $M$  واقعة على دائرة الاستدلال لكل منحني آخر من هذه المنحنيات

وحيث ان كل دائرة استدلال تمر بالنقطتين المشتركتين لأى دائرتين من هذه الدوائر فتكون جميع هذه الدوائر لها محور أصلى مشترك وحينئذ فراكها كلها واقعة على مستقيم عمود على هذا المحور الأصلى

ثم ان الخط المضاعف الذى يصل بين نهايتى أحد أقطار الشكل الرباعى المكوّن من المستقيمت المعلومه هو الوضع النهائى لمنحنى قطاع مخروطى مماس لهذه الخطوط وحينئذ فتتصف أحد الأقطار واقع على المحل الهندسى لمراكز هذه المنحنيات وبناء عليه فالمحل الهندسى لهذه المراكز يلزم أن يكون هو المستقيم المار بمنتصفات الاقطار الثلاثة للشكل الرباعى المذكور

ويكون أحد هذه المنحنيات قطعاً مكافئاً ودليله هو المحور الاصلى المشترك لدوائر الاستدلال

(مسئلة ٣) المطلوب البرهنة على أن أوتار القطاع المخروطى التى تقابل زاوية قائمة رأسها نقطة ثابتة على المنحنى تتقاطع جميعها على العمودى فى هذه النقطة

لنفرض  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ثلاثة أوتار فى قطاع مخروطى وأنها تقابل زاوية قائمة رأسها نقطة م الواقعة على المنحنى

فتكون المستقيمت  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  متعامدة وحينئذ فهى متضامنة

$$\text{وحيئذ } \{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$$

$$\text{لكن } \{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$$

$$\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$$

$$\text{وحيئذ } \{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$$

$$\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$$

وهذه الحزم المتساوية في النسبة التماكسية لها شعاع مشترك وهو  $\alpha$  وإذا فقط تقاطع أشعتها الأخرى المتناظرة يلزم أن تكون واقعة على خط مستقيم وحيث أن  $\alpha$  نقطة تقاطع  $\alpha$  مع  $\beta$  يلزم أن تكون واقعة على خط مستقيم وبناء عليه فالمستقيمتان  $\alpha$  و  $\beta$  تتقاطع في نقطة واحدة وحيث كل وتر يقابل زاوية قائمة رأسها نقطة  $\alpha$  يلزم أن يمر بنقطة تقاطع أى وترين آخرين من هذا القبيل

ويلزم أن تكون النقطة الثابتة التي يمر بها جميع الأوتار واقعة على العمودى في نقطة  $\alpha$  لأن العمودى هو وضع نهائى لأحد الأوتار

(مسألة ٤) إذا فرض أن العمود النازل من نقطة مثل نقطة  $\alpha$  على محورها القطبي بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى معلوم يمر بنقطة ثابتة مثل نقطة  $\alpha$  فالمطلوب البرهنة على أن  $\alpha$  واقعة على منحنى قطع زائد قائم يكون خطاه التقريبان موازيين لمحورى المنحنى الأول ومأزاً بنقطة  $\alpha$  وبمركز المنحنى الأول

لأنه إذا فرض أن العمود النازل من نقطة  $\alpha$  على محورها القطبي بالنسبة لمنحنى ما يقطع المحور القاطع لهذا المنحنى في نقطة  $\alpha$  وأن  $\alpha$  هو العمود النازل على هذا المحور فمن المعلوم أن  $\alpha : \alpha$  ثابت وحيث أن  $\alpha$  كان  $\alpha$  موازيين لمحورى المنحنى تكون الحزمة  $\alpha$  {  $\alpha$  ل  $\alpha$  } ثابتة

ولكن حيث أن  $\alpha$  {  $\alpha$  ل  $\alpha$  } ثابت فينتج أن نقطة  $\alpha$  واقعة على منحنى ثابت ماز بنقطة  $\alpha$  ونقطة  $\alpha$  ونقطتين على بعد لانهائى في اتجاه المحورين وبذلك يثبت المطلوب

وهاك حالة خصوصية لهذه النظرية

(مسألة ٥) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقط مستقيم معلوم بالنسبة لجملة منحنيات قطاعات مخروطية مازة بأربع نقط ثابتة هو منحنى قطاع مخروطي

(مسئلة ٦) المطلوب البرهنة على أن غلاف المحور القطبي لنقطة معلومة بالنسبة لجملة منحنيات قطاعات مخروطية مماسة لأربعة مستقيمت ثابتة هو منحنى قطاع مخروطى

لنفرض أن  $w$  هي النقطة المعلومة وأن  $a \succ b \succ c$  هو الشكل الرابع  
الذي أضلاعه الأربعة  $a, b, c, d$   $a \succ b \succ c \succ d$   $a \succ b \succ c \succ d$  جميع المنحنيات  
للمذكورة

ولنفرض أن وَ هي نقطة تقاطع الرابع المتناسب التوافقي للمستقيمات  
 س د ح ٦ س و ٦ س ا ب مع الرابع المتناسب التوافقي للمستقيمات



صه د ا ك صه و ك صه ح ب بحيث يكون

$$\text{سه} \{ \text{د و ب} \} = 1 - \text{صه} \{ \text{د و ب} \}$$

ونفرض أن د و يقطع ا ب ك ح د ك د ا في ل ك م ك ل ك م  
على التناظر ويقطع أى منحني آخر مار بالنقط ا ك ب ك ح د في تقطقي  
ع ك ع

فمن المعلوم أن ل د ل ك م ك م ك ع د ع هي أزواج من نقط متضامنة

$$\text{ولكن} \{ \text{ل و ل} \} = \text{سه} \{ \text{ل و ل} \} = \text{سه} \{ \text{د و ب} \} = 1 - \text{صه} \{ \text{د و ب} \} \\ \text{ك م و م و} \{ \text{م و م} \} = \text{صه} \{ \text{م و م} \} = \text{صه} \{ \text{د و ب} \}$$

ومنه ينتج أن و ك د هي التقطعات المضاعفتان للتضامن الذي يعينه  
الزوجان ل د ل ك م ك م

$$\text{وحينئذ يحدث} \{ \text{ع ه ع ه} \} = 1 -$$

وإذا فالمحور القطبي لنقطة و بالنسبة للنحنى المار بالنقط ا ك ب ك ح د  
ع ك ع يمر بالنقطة الثابتة و

(مسألة ٨) المطلوب البرهنة على أن أقطاب مستقيم معلوم بالنسبة لجملة  
منحنيات قطاعات مخروطية مماسة لاربعة مستقيمت ثابتة هي جميعا واقعة  
على خط مستقيم

لنفرض ا ب ح أحد المماسات المعلومة وأن ا ب ك ب ك ب ك ح  
هي الاقطار الثلاثة للشكل الرباعي المكون من المماسات الاربعة

ثم نفرض أن المستقيم المعلوم يقطع ا ب ك ب ك ب ك ح في ل ك م ك م  
على التناظر



نفرض أن  $ا$   $ك$   $ح$   $د$   $هـ$   $و$  هي ست نقط على منحنى  
قطاع مخروطي وأن  $ا$   $ك$   $د$   $هـ$  يتقاطعان في  $ل$  وأن  $ح$   $و$   $ك$   $هـ$   
يتقاطعان في  $م$   $ك$   $و$   $د$   $ا$  يتقاطعان في  $ن$

ويراد البرهنة على أن  $ل$   $م$   $ن$  واقعة على خط مستقيم

ولنفرض أن  $د$   $هـ$  يقطع  $ح$  في  $و$  وأن  $د$  يقطع  $ا$  في  $ي$

فيكون  $ل$   $ا$   $ك$   $د$   $هـ$   $و$   $م$   $ح$   $و$   $ك$   $هـ$   $د$   $ا$   $ي$   $ن$

$$\{ا ك د هـ و\} = \{م ح و ك هـ د ا ي\}$$

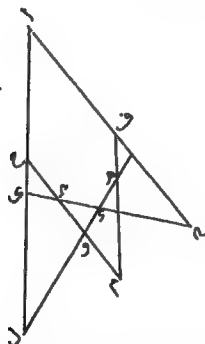
$$\{ا ك د هـ و\} = \{م ح و ك هـ د ا ي\}$$

$$\{ا ك د هـ و\} = \{م ح و ك هـ د ا ي\}$$

$$\{ا ك د هـ و\} = \{م ح و ك هـ د ا ي\}$$

$$\{ا ك د هـ و\} = \{م ح و ك هـ د ا ي\}$$

$$\{ا ك د هـ و\} = \{م ح و ك هـ د ا ي\}$$



ومنه ينتج أن  $ل$   $م$   $ن$  على خط مستقيم واحد

وحيث يمكن ترتيب ست نقط بكميات مختلفة علدها ستون فيمكن رسم ستين مسدسا مناظرة لست نقط على منحنى قطاع مخروطى وحيث ان نظرية پاسكال صحيحة لكل مسدس من هذه المسدسات فيوجد ستون خطا بسكاليا مناظرة لست نقط على منحنى قطاع مخروطى

١٥٣ - نظرية بريانكون - اذا رسم مسدس على منحنى قطاع مخروطى فان أقطاره الثلاثة تتقاطع فى نقطة واحدة

لانه اذا رسم مسدس على منحنى قطاع مخروطى فان نقط تماس أضلاعه تكون هى نقط رؤوس مسدس مرسوم داخل المنحنى ويكون كل راس من رؤوس المسدس الخارجى قطب الضلع المناظر لها من المسدس الداخلى وحينئذ فكل قطر من أقطار المسدس الخارجى أى المستقيم الواصل بين رأسين متقابلين من رؤوسه يكون هو المحور القطبى لنقطة تقاطع ضلعين متقابلين من أضلاع المسدس الداخلى ولكن النقط الثلاثة التى تتقاطع فيها أزواج من الاضلاع المتقابلة من المسدس الداخلى واقعة على خط مستقيم بمقتضى نظرية پاسكال وحينئذ فالمحاور القطبية الثلاثة لهذه النقط أعنى الأقطار الثلاثة للمسدس الخارجى تتقاطع فى نقطة واحدة

اذا علمت نحسة مماسات لمنحنى قطاع مخروطى يمكن ايجاد نقط التماس بواسطة نظرية بريانكون

لانه اذا فرض أن  $a, b, c, d, e, f$  هى رؤوس الخمس المكون من المماسات المعلومة وأن  $k$  هى نقطة تماس  $ab$  تكون  $a, k, b, c, d, e, f$  من رؤوس مسدس خارجى ضامان من أضلاعه منطبقان على بعضهما وبمقتضى نظرية بريانكون يكون  $d, k$  مارا بنقطة تقاطع  $ac$  مع  $b$  و  $e$  واذا فقد علمت نقطة  $k$  وبمثل هذه الطريقة يمكن ايجاد نقط التماس الأخرى



للبهنة على ذلك نفرض  $ا ب$  مثلثا مرسوما في المنحنى  $س$  وعلى المنحنى  $س$

ثم نرسم أى مماس للمنحنى  $س$  ونفرض أنه يقطع المنحنى  $س$  في نقطتي  $ب$   $٦$  ونفرض أن المماسين الآخرين للمنحنى  $س$  المرسومين من  $ب$   $٦$  يتقاطعان في  $ا$

وحيث قد برهنا على أن  $ا$   $٦$   $ب$   $٦$   $ا$   $٦$   $ب$   $٦$  واقعة على منحن واحد ومعلوم أن خمس نقط منها واقعة على المنحنى  $س$  فاذا تكون النقطة السادسة على المنحنى  $س$  لأنه لا يمكن أن يمر بخمس نقط معلومة سوى منحن واحد

(مسألة ٢) اذا رسم مثلثان في منحنى قطاع مخروطي فان أضلاعهما الستة تمس قطاعا مخروطيا آخر

لنفرض أن المثلثين هما  $ا ب$   $٦$   $ا$   $٦$   $ب$  ونفرض أن  $ب$   $٦$  يقطع  $ا$   $٦$   $ب$   $٦$   $ا$   $٦$  في  $هـ$   $٦$   $ف$  على التناظر وأن  $ب$   $٦$  يقطع  $ا$   $٦$   $ب$   $٦$   $ا$   $٦$  في  $هـ$   $٦$   $ف$  على التناظر فحيث ان النقط الستة  $ا$   $٦$   $ب$   $٦$   $ا$   $٦$   $ب$  واقعة على منحن واحد فيكون

$$\{ا ب ب ا\} = \{ا ب ب ا\} \quad \{ا ب ب ا\} = \{ا ب ب ا\}$$

وبذا يثبت المطلوب

(مسألة ٣) اذا فرض مثلثان وكانت رؤوسهما أقطاب أضلاعهما بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطي أيا كان فالمطلوب البرهنة على أن رؤوسهما الستة واقعة على قطاع مخروطي آخر وأن أضلاعهما الستة تمس قطاعا مخروطيا ثالثا

ونفرض أن  $A$   $B$   $C$   $D$   $E$   $F$   $G$   $H$   $I$   $J$   $K$   $L$  على التناظر  
حيث أن  $A$  هي قطب  $A'$   $B$   $C$   $D$   $E$   $F$   $G$   $H$   $I$   $J$   $K$   $L$  فيكون  $A'$  هو المحور  
القطبي لنقطة  $L$  وكذلك يكون  $A$  هو المحور القطبي لنقطة  $K$

وحيث يكون  $\{ \text{أ ب ح د} \} = \{ \text{أ ب ح ك} \}$   
 $\{ \text{أ ب ح ك} \} =$   
 $\{ \text{أ ب ح د} \} =$   
 $\{ \text{أ ب ح د} \} =$

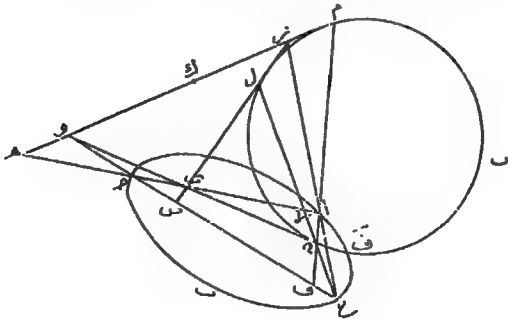
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \bar{a} \bar{c} \bar{c} \\ \bar{a} \bar{c} \bar{c} \\ \bar{c} \bar{c} \bar{c} \end{array} \right\} &= \{ \bar{a} \bar{c} \bar{c} \} \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

والآن يمكننا البرهنة على أنه إذا أمكن رسم مثلث في منحنى قطاع مخروطي معلوم أو عليه وكانت رؤوس هذا المثلث أقطاب أضلاعه بالنسبة لمنحن آخر معلوم فإنه يمكن رسم مثلثات بهذه الكيفية لانهاية لعلها [ انظر مسألة ١ ]

(مسألة ٤) اذا كانت رؤوس مثلث أقطاب أضلاعه بالنسبة لمنحنى القطع المخروطي ب وكان مرسوما في القطع المخروطي ب فالمطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم مثلثات لانهاية لعددها تكون رؤوسها أقطاب أضلاعها بالنسبة للمنحنى ب وتكون مرسومة على المنحنى ب  
 لنفرض أن  $ا ح$  هو المثلث المرسوم في المنحنى ب وأن رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة للمنحنى ب

ونفرض أن ك هي قطب الضلع  $ا ح$  بالنسبة للمنحنى ب  
 ونرسم من نقطة ك المماس ك م للمنحنى ب ونفرض أن ك م يقطع  $ح$  في نقطة و ويقطع  $ا ح$  في نقطة هـ

فحيث ان و واقعة على  $ح$  فاذا فرض أب و د هو المماس الثاني المرسوم من نقطة و للمنحنى ب يكون م ا د خطا مستقيما ثم نفرض أن م د يقطع  $ح$  في نقطة ف وأن و د يقطع ا ح في نقطة ي ويقطع ا ح في نقطة ف ثم نفرض أن المماس الثاني للمنحنى ب من نقطة ي يمر بالمنحنى المذكور في نقطة ل ويقطع و م في نقطة ن ا ح في نقطة صـ





حيث ان  $a$  قطب الضلع  $z$   $\propto$  بالنسبة للنحنى  $b$  فيكون  
 $1 - \{a \propto b\} = \{a \propto c\} = \{a \propto d\} = \{a \propto e\}$   
 وحينئذ فالمحور القطبي لنقطة  $e$  بالنسبة للنحنى  $b$  يمر بنقطة  $h$  وكذلك  
 يمر بنقطة  $k$  لان  $k$  هي قطب المستقيم  $z$   $\propto$   $a$  بالنسبة للنحنى  $b$   
 وحينئذ فالمستقيم  $z$  هو المحور القطبي لنقطة  $e$  بالنسبة للنحنى  $b$   
 ثم حيث ان  $z$  هي قطب المستقيم  $z$   $\propto$   $a$  بالنسبة للنحنى  $b$  فيكون  
 $1 - \{z \propto a\} = \{z \propto b\} = \{z \propto c\} = \{z \propto d\} = \{z \propto e\}$   
 وحينئذ فالمحور القطبي لنقطة  $b$  بالنسبة للنحنى  $a$  يمر بنقطة  $h$  وحيث  
 ان  $z$  هو المحور القطبي لنقطة  $e$  فيكون المحور القطبي لنقطة  $a$  ومازا بنقطة  $e$   
 وحينئذ يكون  $z$  هو المحور القطبي لنقطة  $b$  بالنسبة للنحنى  $a$  واذا  
 فالمثلث  $z$  الذي تمس أضلاعه الثلاثة المنحنى  $b$  تكون رؤوسه أقطاب  
 أضلاعه بالنسبة للنحنى  $b$  ومن المعلوم أنه اذا وجد مثلث واحد من هذا القبيل  
 مثل المثلث  $z$  و  $z$  توجد مثلثات من هذا القبيل أيضا لانهاية لعددها

١٥٥ - الصفوف والحزم المتناظرة - يقال للصفوف والحزم انها  
 متناظرة متى كانت كل أربع من عناصر احداها لها نسبة تعاكسية تساوى  
 النسبة التعاكسية للعناصر الاربعة المتناظرة لها فى الاخرى

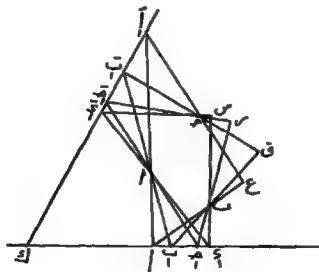
(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن نقط تقاطع الخطوط المتناظرة  
 فى حزمتين متناظرتين ترسم منحنى قطاع مخروطى

نفرض  $e$   $z$   $6$   $6$   $6$   $6$   $6$   $6$  أربع نقط أيا كانت من نقط تقاطع  
 المستقيمت المتناظرة وأن  $k$   $6$  هما رأسا الحزمتين

فاذا فرض ان  $\Gamma$  يقطع المستقيم  $\omega$  في نقطة  $\alpha$  يكون

$$\{ع ا ب ح ع\} ك = \{ع و ع ع\}$$

لنفرض أن  $a, b, c$  هي النقط الثلاثة الثابتة وأن  $k, l$  هما  
المستقيمان الثابتان ثم نرسم مثلثات كما في الشكل  
فيكون الصفان  $\{a, b, c, d, e, f\}$  و  $\{a, b, c, d, e, f\}$  متناظران  
وحيث أن  $a, b, c, d, e, f$  متناظران  
متناظران فينتج المطلوب من مسألة ١



وما ذكر هو طريقة ماكلورين في تولد القطاع المخروطي

(مسألة ٧) اذا فرض أن جميع أضلاع شكل كثير الاضلاع تمر بنقط ثابتة وأن جميع رؤوسه ماعدا رأس واحدة تتحرك على مستقيمت ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن الرأس الباقية ترسم منحني قطاع مخروطي

١٥٦ - النقطتان الدائريتان اللانهائيتان -

حيث ان أى زوج من المستقيمت المتعامدة المارة بمركز دائرة هو قطران متساويان وحيث ان الأزواج من المستقيمت المتزاوجة بالنسبة لقطاع مخروطي والتي تمر بنقطة ما هي متضامنة وأن المماسين الحقيقيين أو التخيليين لهذا المنحني والمائرين بهذه النقطة هما الخطان المضاعفان لهذا التضامن فتكون الخطوط التقريبية التخيلية لجميع الدوائر متوازية أى أن جميع الدوائر تمر بهاتين النقطتين التخيليتين نفسيهما وعلى بعد لانهاى

وكذلك فالدوائر المشتركة في المركز لها خطان تقريبان تخيليان مشتركان

وحيث أن فتكون هذه الدوائر متماسة في نقطتين على بعد لانهاى

النقطتان التخيليتان اللتان على بعد لانهاى واللذان تمر بهما جميع الدوائر يسميان النقطتين الدائريتين اللانهائيتين

وحيث ان أى زوج من المستقيمت المتعامدة المارة ببؤرة قطاع مخروطي هما خطان متساويان وان هذه الأزواج من المستقيمت المتزاوجة تكون تضامنا فيه المماسان التخيليان من البؤرة هما الخطان المضاعفان

فينتج أن الماسين التخيليين لأى قطاع مخروطى من بورة من بوره هما موازيان للخطين التقريبيين التخيليين لأى دائرة أى أن الماسين لأى قطاع مخروطى المرسومين من بورة من بوره يمران بالنقطتين الدائريتين اللانهائيتين وحيثنذ فجميع القطاعات المخروطية التى لها بورة مشتركة لها ماسان تخيليان مشتركان ماران بهذه البورة وجميع القطاعات المخروطية المشتركة فى البورتين لها أربعة مماسات تخيلية مشتركة

١٥٧ - قد بينا كيفية انشاء منحنى القطاع المخروطى الذى يمر بخمس نقط معلومة أو خمس خمسة مستقيمت معلومة ومن المهم درس الاحوال الأخرى الآتية

(مسألة ١) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطى يمر بأربع نقط معلومة ويمس مستقيما معلوما

لنفرض أن المستقيم المعلوم يقطع زوجين من الاضلاع المتقابلة فى الشكل الرباعى المكوّن من النقط الاربعة المعلومة فى ١ ٦ ١ وفى ٦ ٦ ٦

فبمقتضى نظرية دسارج تكون جميع منحنيات القطاعات المخروطية المارة بالنقط الاربعة المعلومة مقطوعة فى أزواج من النقط المتراوحة فى التضامن الذى يعينه الزوجان ١ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦

وحيثنذ اذا فرض أن منحنى قطاع مخروطى مار بالأربع النقط المعلومة يمس المستقيم المعلوم فإن نقطة التماس يلزم أن تكون احدى النقط المضاعفة لهذا التضامن وحيثنذ فيوجد منحنيان (إما حقيقيان أو تخيليان) يمران بأربع نقط معلومة ويمسان مستقيما معلوما

وحيث معلوم خمس نقط على كل منهما فيمكن اتمام الرسم كما فى بند ١٤٤

(مسألة ٢) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطى يمر بأربعة مستقييات معلومة ويمر بنقطة معلومة

يمكن إيجاد المماس فى النقطة المعلومة بواسطة عكس نظرية دسارج  
(بند ١٥١)

(مسألة ٣) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطى يمر بثلاث نقط معلومة ويمس مستقيين معلومين

نفرض أن  $a$   $b$   $c$  هما المستقيان المعلومان وأن  $d$   $e$   $f$  هى النقط المعلومة

ونفرض أن منحنى قطاع مخروطى أيا كان ما إذا بنقطتي  $d$   $e$  يمر  $a$   $b$   $c$  فى  $l$   $m$  على التناظر وأن  $d$   $e$  يقطع  $l$   $m$  فى  $e$  ويقطع  $a$   $b$   $c$  فى نقطتي  $b$   $c$  على التناظر

فيكون المستقيان  $a$   $b$   $c$  والمستقيم والخط المضاعف  $l$   $m$   $e$  والمنحنى المار بنقطتي  $d$   $e$  عبارة عن ثلاث منحنيات مارة بالأربع النقط المذكورة وهى نقطتان متطبقتان على كل من النقطتين  $l$   $m$

وحينئذ فهذه المنحنيات يقطعها المستقيم  $d$   $e$  فى تضامن وإذا فنقطه  $e$  هى إحدى النقطتين المضاعفتين للتضامن الذى يعينه الزوجان  $(d$   $e)$   $(b$   $c)$

وحينئذ فوتر التماس للماسين  $a$   $b$   $c$  يمر بإحدى نقطتين ثابتتين على المستقيم  $d$   $e$  وكذلك يمر بإحدى نقطتين ثابتتين على المستقيم  $f$

وحينئذ فوتر التماس هو أحد أربعة مستقييات ثابتة فإذا فرض أن أحد هذه المستقييات يقطع  $a$   $b$   $c$  فى نقطتي  $d$   $e$  فإنه يوجد منحنى

واحد فقط مناظر له ومار بالنقط الخمسة  $د$   $هـ$   $ك$   $ف$   $و$   $ي$  ويمكن  
رسم هذا المنحنى كما في بند ١٤٤ أو بند ١٥٣

وحيث أنه فيمكن رسم أربعة منحنيات تمر بثلاث نقط معلومة وتمس  
مستقيمين معلومين

(مسألة ٤) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطي يمر بنقطتين معلومتين ويمس  
ثلاثة مستقيمات معلومة

لنفرض  $ا ب ج$  المثلث المكوّن من المماسات الثلاثة المعلومة وأن  $د هـ$   
هما النقطتان المعلومتان

فكما تقدم في مسألة ٣ يكون وتر التماس للاسمين المارين بنقطة  $ا$  مارا  
باحدى نقطتين ثابتتين على المستقيم  $د هـ$  مثل النقطتين  $س هـ$   $ك$   $س$

فاذا كان  $ا و$  هو المحور القطبي لنقطة  $س هـ$  بالنسبة للمنحنى يكون  
 $ا س هـ و د$   $= - ١$  وحيث أنه فيمكن رسم  $ا و$  وكذلك يمكن رسم  $ا و$   
الذى هو المحور القطبي لنقطة  $س هـ$  واذا فنقطة  $ك$  التى هى قطب المستقيم  $د هـ$   
واقعة على أحد مستقيمين ثابتين مارين بنقطة  $ا$  وكذلك تكون  $ك$  واقعة  
على أحد مستقيمين ثابتين مارين بنقطة  $ب$  واذا فنقطة  $ك$  هى احدى نقط  
أربعة ثابتة ومتى علمت  $ك$  يكون  $ك د هـ$  هما المماسان المتناظران للمنحنى  
وبذلك يتعين المنحنى تماما حيث علم خمسة مماسات له

واذا فيمكن رسم أربعة منحنيات تمر بنقطتين معلومتين وتمس ثلاثة  
مستقيمات معلومة

(مسألة ٥) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطي اذا علمت المحاور القطبية  
لثلاث نقط معلومة بالنسبة لهذا المنحنى

فإذا فرض أن ك هي نقطة تقاطع مستقيمين مارين بالنقطتين ب ٦ ح  
وموازيين للخطين ا ب ٦ ح ا على التناظر يكون مركز المنحنى واقعا على  
المستقيم ا ك وإذا فرض أن ل هي نقطة تقاطع مستقيمين مارين بالنقطتين  
٦ ح ٦ ح موازيين للخطين ا ب ٦ ب ح على التناظر يكون مركز المنحنى  
واقعا على المستقيم ب ل وإذا تعين المركز ك للمنحنى

ولنفرض أن ك ب ت ك ج ك د تقطع ب ح ا ٦ ا ٦  
في ع ٦ ب ٦ على التناظر فاذا فرض أن ٦ ب ٦ ع واقعتان في جهة واحدة  
بالنسبة لنقطة ك وأن نقطة و في وضع بحيث يكون ك و = ك ٦ × ك ع  
فإن المستقيم المرسوم من و موازيا للمستقيم ب ح يكون مماسا للمنحنى وبناء عليه  
إذا كان المنحنى قطعاً ناقصاً يمكن إيجاد المماسات في ثلاث نقط وإذا فرض  
أن المماس في نقطة و يقطعه المستقيم ك ب والمستقيم المرسوم من نقطة ك  
موازيا للمستقيم ح ا في نقطتي ط ٦ ط على التناظر يكون المستطيل ط و . و ط .  
مساوياً لمربع نصف القطر المزوج للمستقيم ك و وإذا قد تعين زوج من  
القطرين المتزاوجين في القطع الناقص وضعا وطولا فيكون اتمام الرسم كما  
في بند ٧٥ وإذا كان المنحنى قطعاً زائداً فإن الخططين التقريبيين هما الخططان  
المضاعفات للحزمة المتضامنة التي أحد أرواجها المتقارنة هما المستقيم ك ا  
والمستقيم المرسوم من ك موازيا للمستقيم ب ح والزوج الثاني هما المستقيم  
ك ب و المستقيم المرسوم من ك موازيا للمستقيم ح ا فإذا علم الخططان التقريبيان  
وعلم قطب مستقيم معلوم يمكن تقييم رسم المنحنى



١٥٨ - النسبة بين المستطيل المكوّن من العمودين النازلين من نقطة

أيا كانت من منحنى قطاع مخروطي على ضلعين متقابلين من أضلاع شكل رباعي مرسوم في المنحنى وبين المستطيل المكوّن من العمودين النازلين من هذه النقطة على الضلعين المتقابلين الآخرين هي ثابتة [ نظرية پاپس ]

لنفرض  $a, b, c, d$  أربع نقط معلومة على منحنى قطاع مخروطي ونفرض  $k$  نقطة أخرى على المنحنى أيا كانت ونفرض أن  $k, a, b, c, d$  هي الأعمدة النازلة من  $k$  على  $a, b, c, d$  وعلى التناطر. فعلينا الآن أن نثبت أن النسبة  $k, a : k, b : k, c : k, d$  ثابتة لجميع أوضاع  $k$  على المنحنى

فلنفرض أن  $k, b, c, d$  يقطعان  $a$  في نقطتي  $e, f$  على التناطر فيكون  $k, a : b, c, d = e, f : a, b, c, d = e, f : a, b, c, d$  وواضح أن  $a, b, c, d = e, f : a, b, c, d = e, f : a, b, c, d$  وحيث أن  $k, a : b, c, d$  ثابت لجميع أوضاع نقطة  $k$  على المنحنى فينتج أن  $k, a : b, c, d$  ثابت

### مسائل

- (١) إذا علمت خمس نقط على منحنى قطاع مخروطي فالمطلوب بيان كيفية إيجاد نقط أخرى على هذا المنحنى
- (٢) إذا علمت خمسة مماسات لمنحنى قطاع مخروطي فالمطلوب بيان كيفية إيجاد مماسات أخرى لهذا المنحنى
- (٣) المطلوب رسم منحنى قطاع مخروطي مع معلومية المركز وثلاث نقط
- (٤) المطلوب رسم منحنى قطاع مخروطي مع معلومية المركز وثلاثة مماسات

(٥) المطلوب رسم منحنى قطاع مخروطى مع معلومية نقطتين عليه ومثلث رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة لهذا المنحنى

(٦) المطلوب رسم منحنى قطاع مخروطى مع معلومية مماسين ومثلث رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة لهذا المنحنى

(٧) المطلوب إيجاد مركز قطع زائد قائم بمس أربعة مستقيمت معلومة

(٨) اذا علمت جملة قطاعات زائدة قائمة وعلم مثلث رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة للمنحنيات المذكورة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز هذه القطاعات الزائدة القائمة هو الدائرة المرسومة على المثلث المذكور

(٩) اذا رسم منحنى قطاع مخروطى فى المثلث  $ABC$  ومس الضلع  $BC$  فى نقطة  $F$  فالمطلوب البرهنة على أن مركز المنحنى واقع على المستقيم الواصل بين منتصفى  $BC$  و  $AF$

(١٠) اذا فرض أن  $ABC$  و  $DEF$  أربع نقط أيا كانت على منحنى قطع زائد وان  $DE$  الموازى لأحد الخطين التقريبيين يقطع  $AF$  فى نقطة  $K$  وأن  $DL$  الموازى للخط التقريبى الآخر يقطع  $BC$  فى نقطة  $L$  فالمطلوب البرهنة على أن  $KL$  مواز للمستقيم  $AB$

(١١) المطلوب البرهنة على أن الستين خطا الهندسية المناظرة لست نقط على منحنى قطاع مخروطى تتقاطع ثلاثا ثلاثا

(١٢) اذا فرض أن أقطاب الاضلاع  $BC$  و  $AC$  و  $AB$  بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى هى  $6$  و  $6$  و  $6$  على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن  $6$  و  $6$  و  $6$  تتقابل فى نقطة واحدة وان نقط تقاطع  $BC$  و  $AC$  و  $AB$  مع  $6$  و  $6$  و  $6$  واقعة على خط مستقيم واحد

(١٣) المطلوب إيجاد نقط تقاطع مستقيم معلوم بمنحنى قطاع مخروطي تعيينه خمس نقط معلومة وذلك بطريقة هندسية

(١٤) المطلوب رسم مماسات بطريقة هندسية من نقطة معلومة لمنحنى القطاع المخروطي الذي تعيينه خمسة مماسات معلومة

(١٥) اذا رسم من نقطة ثابتة على منحنى قطاع مخروطي مستقيم يقطع المنحنى في نقطة ثانية مثل نقطة ع ويقطع أضلاع مثلث معلوم مرسوم في المنحنى في ٦ ٦ ٦ ع على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن  
 $\{ع ٦ ٦ ع\}$  ثابت

(١٦) اذا فرضت نقطة ما مثل نقطة م على مماس ثابت لمنحنى قطاع مخروطي وفرض أن م ٧ هو المماس الثاني للمنحنى من نقطة م وكانت ا ب ح رؤوس مثلث أيا كان مرسوم على المنحنى المذكور فالمطلوب البرهنة على أن  
 $\{م ا ب ح ٧\}$  ثابت لجميع أوضاع نقطة م

(١٧) اذا فرض أن ع ٦ ٧ نقطتان متزوجتان بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطي وأن ع واقعة على مستقيم ثابت وان ٧ ع يقابل زاوية قائمة رأسها نقطة ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة ٧ هو منحنى قطاع مخروطي مار بالنقطة الثابتة

(١٨) اذا فرض أنه من نقطة ثابتة مثل نقطة م على أحد الاقطار الثلاثة لشكل رباعي تام رسمت مماسات لمنحنيات القطاعات المخروطية المرسومة في الشكل الرباعي المذكور فالمطلوب البرهنة على أن نقط التماس واقعة على منحنى قطاع مخروطي مار بنهايات القطرين الآخرين وقاسم لاقطر الذي عليه نقطة م بنسبة توافقية

(١٩) اذا فرض أن مستقيما يقطع دائرتين معلومتين في نقط متراوجة تراوجا توافقيا فالمطلوب البرهنة على أن هذا المستقيم يغلف منحنى قطاع مخروطي بورتاه مركزا الدائرتين

(٢٠) المطلوب بيان كيفية رسم شكل كثير الأضلاع يمر كل ضلع من أضلاعه بنقطة ثابتة وتقطع كل رأس من رؤوسه على مستقيم معلوم

(٢١) اذا فرض أن ثلاثة منحنيات قطاعات مخروطية تمر بأربع نقط مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن المماس المشترك بين منحنين منهما يقسمه المنحنى الثالث بنسبة توافقية

(٢٢) اذا فرضت أربعة مستقيمت كل منها مماس لثلاثة قطاعات مخروطية معلومة فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمت المماس لاثنتين منها في نقطة مشتركة والمماسين المرسومين من هذه النقطة للمنحنى الثالث تكون حزمة توافقية

(٢٣) اذا فرض أن قطعا زائدا يمر بمركز منحنى قطاع مخروطي وأن خطيه التقريبيين موازيان لقطرين متراوجين من أقطار المنحنى المذكور فالمطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم مثلثات عددها لانهاى في القطع الزائد المذكور بحيث تكون رؤوسها أقطاب أضلاعها بالنسبة للمنحنى

(٢٤) اذا فرض أن  $a, b, c, d, e, f$  شكل سداسى أيا كان مرسوم فى منحنى قطاع مخروطي فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين حاصل الضرب المتواصل للاعمدة النازلة من نقطة ما من المنحنى إلى الأضلاع  $a, b, c, d, e, f$  وبين حاصل الضرب المتواصل للاعمدة النازلة من النقطة المذكورة إلى الأضلاع المتبادلة مع الأولى وهى  $b, c, d, e, f, a$  هى ثابتة

(٢٥) اذا فرض أن منحني قطاع مخروطي يمر المستقيمت الأربعة  
 $ا ب \delta \delta \delta \delta$  و  $ا و ا$  وأن مماسا آخر يقطع  $ا \delta$  و  $ب \delta$  في  $ع \delta$  و  
 على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن  $ا ع : ع \delta$  و  $ب \delta : \delta$  بينهما  
 نسبة ثابتة ثم البرهنة بناء على ذلك أو بأي طريق آخر على أن النسبة بين  
 المستطيل المكوّن من العمودين التازلين من  $ا \delta$  و  $ع$  على أي مماس آخر لهذا  
 المنحني وبين المستطيل المكوّن من العمودين التازلين من  $ب \delta$  و  $ع$  على هذا  
 المماس هي ثابتة

(٢٦) اذا فرض أن  $و$  نقطة أيا كانت على مستقيم معلوم  $و$  نقطة  
 تقاطع المحورين القطبيين لنقطة  $و$  بالنسبة لمنحني قطاعين مخروطيين  
 معلومين فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة  $و$  لجميع أوضاع  $و$   
 هو منحني قطاع مخروطي

(٢٧) اذا رسم مستقيم أيا كان من نقطة معلومة مثل نقطة  $م$  وفرض  
 أن  $و \delta$  و  $و$  قطبا هذا المستقيم بالنسبة لمنحني قطاعين مخروطيين معلومين  
 فالمطلوب البرهنة على أن غلاف  $و$  و  $و$  للمستقيمت المختلفة المارة بنقطة  $م$   
 هو قطاع مخروطي

(٢٨) اذا فرض أنه من نقطتين أيا كانا مثل  $ط \delta$  و  $ط$  رسم المماسان  
 $ط ع \delta$  و  $ط و$  والمماسان  $ط ع \delta$  و  $ط و$  لمنحني قطاع مخروطي فالمطلوب  
 البرهنة على أن النقط الستة  $ط \delta$  و  $ط ع \delta$  و  $ع \delta$  و  $و \delta$  و  $و$  واقعة على  
 منحني قطاع مخروطي آخر

(٢٩) المطلوب البرهنة على أن الدائرة المرسومة على مثلث رؤوسه أقطاب  
 أضلاعه بالنسبة لمنحني قطاع مخروطي تقطع دائرة الاستدلال لهذا المنحني  
 بالتعامد

(٣٠) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز منحنيات القطاعات المخروطية المرسومة في مثلث والتي لها دوائر امتدلال ذات نصف قطر معلوم هو محيط دائرة .

(٣١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز القطاعات الزائدة القائمة التي تماس أضلاع مثلث هو الدائرة القطبية لهذا المثلث

(٣٢) المطلوب البرهنة على أن دوائر الاستدلال لجميع منحنيات القطاعات المخروطية التي تماس أضلاع مثلث تقطع الدائرة القطبية لهذا المثلث بالتعامد

### المسقط المخروطى

١٥٩ - اذا وصلنا نقطة ما كنقطة ع بنقطة ثابتة مثل نقطة ف وقطعنا ف ع بأى مستو ثابت في نقطة مثل ع فان ع تسمى مسقط ع على هذا المستوى وتسمى نقطة ف رأس المسقط أو مركز المسقط ويسمى المستوى القاطع مستوى المسقط

١٦٠ - مسقط أى خط مستقيم خط مستقيم

وذلك لأن المستقيمت الواصلة بين نقطة ف وجميع نقط أى خط مستقيم جميعها في مستو واحد وهذا المستوى يقطعه مستوى المسقط في خط مستقيم

١٦١ - مسقط أى منحن مستو هو منحن من الدرجة عينها

وذلك لأنه اذا فرض أن مستقيما أيا كان يقطع المنحنى الاصلى في جملة نقط مثل ا ب ج د ه و . . . فان مسقط المستقيم يقطع مسقط المنحنى في نقط تقاطع ا ب ج د ه و ف ه بمستوى المسقط وحيث عدد النقط في أحد المنحنيين التي على مستقيم واحد يساوى عدد النقط التي على مستقيم واحد في المنحنى الثانى وبذلك تثبت النظرية

١٦٢ - مسقط مماس المنحنى هو مماس مسقط المنحنى

لأنه إذا فرض أن مستقيما يقطع منحنيا في نقطتين  $a$  و  $b$  فإن مسقط هذا المستقيم يقطع مسقط المنحنى في نقطتين مثل  $a$  و  $b$  وهما نقطتا تقاطع  $a$  و  $b$  بمستوى المسقط فإذا فرض أن  $a$  انطبقت على نقطة  $a$  تنطبق كذلك  $b$  على  $b$

١٦٣ - الارتباط بين القطب والمحور القطبي بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى هو بعينه فى المسقط

وذلك واضح من البندين السابقين

وواضح أيضا أن مسقط النقطتين المتراوجتين أو المستقيمين المتراوجين بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى هما نقطتان متراوجتان أو مستقيمان متراوجان بالنسبة لمسقط المنحنى

١٦٤ - إذا رسم مستو ماز بالرأس ومواز لمستوى المسقط وفرض أنه يقطع المستوى الاصلى فى المستقيم  $كـ لـ$  فإنه يحدث من توازى المستوى  $ف كـ لـ$  ومستوى المسقط أن خط تقاطعهما وهو مسقط المستقيم  $كـ لـ$  يكون على بعد لانهاى

وحيلئذ فإذا أردنا إسقاط أى مستقيم مثل  $كـ لـ$  على بعد لانهاى نعتبر نقطة أيا كانت مثل  $ف$  رأسا ونعتبر مستويا موازيا للمستوى  $ف كـ لـ$  مستوى المسقط

فيكون مسقط المستقيمتين اللتين تتقاطع فى نقطة على المستقيم  $كـ لـ$  مستقيمتين موازيتين لها لأن مسقط نقطة تقاطعهما هو نقطه على بعد الى مالانهايه

١٦٥ - مسقط جملة خطوط مستقيمة متوازية في المستوى الاصلى هو خطوط مستقيمة متقاطعة في نقطة

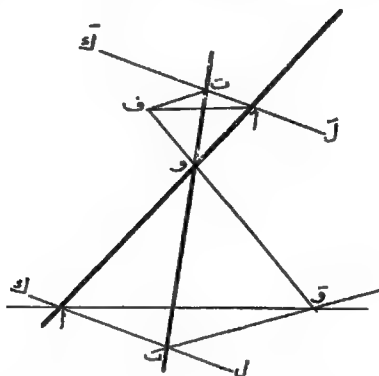
للبهنة على ذلك نفرض أن  $F$  ع هو المستقيم المرسوم من الرأس موازيا للمستقيمتين المفروضة  $AB$  نقطة واقعة على مستوى المسقط بحيث ان  $F$  ع موجودة في المستوى المار بنقطة  $F$  ويخط من الخطوط المتوازية فيكون مسقط كل خط من الخطوط المتوازية ما زا بنقطة  $E$

وتغير نقطة  $E$  باختلاف مجموعات الخطوط المتوازية ولكن حيث ان  $F$  ع مواز على الدوام للمستوى الاصلى فتكون نقطة  $E$  واقعة على الدوام على خط تقاطع مستوى المسقط بمستو ما ز بالرأس وموازي للمستوى الاصلى وحينئذ فسقط جملة خطوط متوازية في المستوى الاصلى هو خطوط متقاطعة في نقطة واحدة وجميع هذه النقط واقعة على خط مستقيم للجموعات المختلفة من الخطوط المتوازية

١٦٦ - لنفرض أن  $L$  هو خط تقاطع المستوى الاصلى بمستوى المسقط ونرسم من الرأس مستويا موازيا لمستوى المسقط ونفرض أنه يقطع المستوى الاصلى في المستقيم  $L$  ثم نفرض أن المستقيمين  $AB$  و  $CD$  يقطعان المستقيمين  $L$  و  $L'$  في النقطتين  $A$  و  $B$  والنقطتين  $C$  و  $D$  على التناظر وأن  $F$  و  $G$  يقطع مستوى المسقط في  $D$  فيكون  $AD$  و  $BC$  مسطوي  $AD$  و  $BC$  و  $B$

وحيث ان المستويين  $F$  و  $G$  و  $AD$  و  $BC$  متوازيان ومن المعلوم أن المستويين المتوازيين يقطعهما مستو واحد في خطين متوازيين فيكون المستقيمان  $F$  و  $G$  و  $AD$  و  $BC$  موازيين للمستقيمين  $AD$  و  $BC$  على التناظر





وكذلك اذا فرض أن المستقيمين  $\alpha$  و  $\beta$  هـ يقطعان  $\gamma$  في  $\delta$  و  
على التناظر تكون الزاوية  $\delta$  ف  $\delta$  مساوية لمسقط الزاوية  $\delta$  و  
ونستنتج مما تقدم النظرية الاساسية الآتية في المساقط وهي

كل خط مستقيم يمكن اسقاطه الى مالا نهاية وفي الوقت عينه يمكن اسقاط أى زاويتين بحيث يكون المسقط زاويتين معلومتين لأنه اذا فرض أن المستقيمتين المكوّنة للزاويتين تقطع المستقيم الذى يراد اسقاطه الى مالا نهاية فى النقطتين  $\alpha$   $\beta$  والنقطتين  $\gamma$   $\delta$  ثم رسمنا مستويا أيا كانا مازا بالنقطتين  $\alpha$   $\beta$  ورسمنا فى هذا المستوى قطعتين دائريتين مائتين بالنقطتين  $\alpha$   $\beta$  والنقطتين  $\gamma$   $\delta$  على التناظر ومشتمتلتين على زاويتين مساويتين للزاويتين المعلومتين فنعبر احدى تقطعي التقاطع للقطعتين

المذكورتين مركزا للاسقاط ولا بد ان يكون مستوى المسقط موازيا للمستوى الذى رسمناه مازا بالنقط  $a$   $b$   $c$   $d$  واذا لم تتقابل القطعتان يكون مركز المسقط تخيليا

(مسألة ١) كيفية اثبات أنه يمكن أن يكون مسقط أى شكل رباعى مربعا ليكن  $a$   $b$   $c$   $d$  هو الشكل الرباعى المعلوم وأن  $e$   $f$   $g$   $h$  (أنظر الشكل الاخير من بند ١٣٨) هما نقطتا تقاطع كل ضلعين متقابلين من أضلاعه وأن القطرين  $e$   $f$   $g$   $h$   $a$   $b$   $c$   $d$  يقطعان المستقيم  $e$   $f$   $g$   $h$  فى النقطتين  $b$   $d$   $e$   $f$   $g$   $h$   $a$   $b$   $c$   $d$  فافاذا أسقطنا  $e$   $f$   $g$   $h$   $a$   $b$   $c$   $d$  على زاويتين قائمتين فان مسقط الشكل الرباعى يلزم أن يكون مربعا لأنه حيث ان مسقط  $e$   $f$   $g$   $h$  الى مالا نهاية يكون كل ضلعين متقابلين من المسقط متوازيين ويكون المسقط اذا متوازى أضلاع

وكذلك علم أن احدى زوايا متوازى الاضلاع قائمة والزاوية المحصورة بين قطريه قائمة أيضا وحينئذ فالمسقط مربع

(مسألة ٢) كيفية اثبات أن المثلث المكوّن من أقطار الشكل الرباعى رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة لأى منحنى قطاع مخروطى يمس أضلاع الشكل الرباعى

لذلك نسقط الشكل الرباعى على مربع فتكون الدائرة المرسومة على المربع هى دائرة الاستدلال للمنحنى المذكور وحينئذ فنقطه تقاطع قطرى المربع هى مركز المنحنى

وحيث أن المحور القطبى للركر هو المستقيم الموضوع على بعد لانهاى فيكون المحور القطبى لنقطه تقاطع قطرين من الأقطار الثلاثة هو القطر الثالث

(مسألة ٣) المطلوب البرهنة على أنه اذا رسم منحني قطاع مخروطي في شكل رباعي فان المستقيم الواصل بين نقطتين من نقط التماس يمر بأحد رؤس المثلث المكوّن من اقطار الشكل الرباعي

(مسألة ٤) اذا فرض ان  $a \neq b$  مثلث مرسوم على قطع مكافئ ثم كملت متوازيات الاضلاع  $a \neq b \neq c \neq d$  فالمطلوب البرهنة على أن اوتار التماس تمر بالنقط  $a \neq b \neq c$  على التناظر

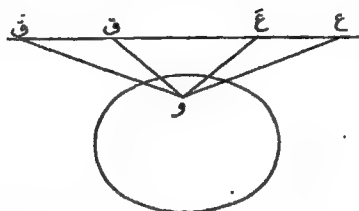
هذه هي حالة خصوصية لمسألة ٣ و فيها أحد اضلاع الشكل الرباعي هو المستقيم الذي على بعد لانهائي

(مسألة ٥) اذا فرض أن المستقيمتين الثلاثة الواصلة بين رؤس مثلثين تتقابل في نقطة واحدة فالمطلوب البرهنة على أن النقط الثلاثة التي يتقاطع فيها كل ضلعين متناظرين واقعة على مستقيم واحد

لانه اذا أسقطت نقطتان من نقط تقاطع الاضلاع المتناظرة على بعد الى ما لانهاية يكون زوجان من الاضلاع المتناظرة متوازيين ومن السهل البرهنة على أن الضلعين الباقيين متوازيان أيضا

(مسألة ٦) يمكن اسقاط أى قطاعين مخروطيين على قطاعين مخروطيين متحدى المركز [أنظر بند ١٤٩ مسألة ٢]

١٦٧ - يمكن اسقاط أى قطاع مخروطي على دائرة مركزها مسقط أى نقطة معلومة



لنفرض ان و هي النقطة التي يراد أن يكون مسقطها مركزا لمنحنى المسقط  
ونفرض ع نقطة ما على المحور القطبي لنقطة و و المحور القطبي لنقطة  
ع فيكون و ع و و مستقيمين متزاوجين

ثم نفرض و ع و و مستقيمين متزاوجين آخرين وتأخذ مستقيمين  
متزاوجين آخرين وليكونا و ع و و

ثم نسقط المحور القطبي لنقطة و على بعد الى ما لا نهاية ونسقط الزاويتين  
ع و و ع و و على زاويتين قائمتين فينشأ اذا منحني قطاع مخروطي  
مركزه مسقط نقطة و وحيث ان زوجين من الاقطار المتزاوجة متعامدان  
فيكون هذا المنحنى دائرة

١٦٨ - خواص الشكل الثابتة لكل مسقط من مساقطه تسمى  
بالخواص المسقطية وعلى العموم لا تشمل هذه الخواص المسقطية المقادير الا  
انه قد توجد بعض خواص مسقطية مشتملة على مقادير المستقيمت والزوايا  
وأشهرها الخاصة الآتية

النسبة التعاكسية للحزم والصفوف لا تتغير بالاسقاط

لنفرض ا ب ا ب و د ا ب و د أربع نقط على خط مستقيم ا ب ا ب و د  
و مساقطها فاذا كانت ف مركز المسقط يكون ف ا ب ا ب و د ف ب ا ب  
ف د ا ب و د خطوطا مستقيمة ويحدث [ بمقتضى بند ١٣٨ ]  
$$\{ ا ب و د \} = \{ ف ا ب و د \} = \{ ا ب و د \}$$

وإذا فرضت حزمة مكونة من أربع مستقييات متقابلة في نقطة مثل و  
وفرض أن قاطعا قطع الحزمة في  $a, b, c, d$  يحدث

$$\{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

وينتج مما تقدم ومن بند ١٤١ أنه إذا كانت جملة نقط مكونة لتضامنا  
تكون مساقطها مكونة لتضامنا أيضا

(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن أى وتر من أوتار منحنى قطاع  
مخروطى مار بنقطة مثل و يقسمه المنحنى والمحور القطبى لنقطة و بنسبة توافقية  
لذلك نسقط المحور القطبى لنقطة و اسقاطا لنهايتها فتكون و مركز  
المسقط وإذا تكون منتصف الوتر ويكون  $\{c, d, e, f\}$  مكونا لنسبة  
توافقية متى كان  $c, d, e, f = c, d, e, f$

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن منحنيات القطاعات المخروطية  
المارة بأربع نقط ثابتة يقطعها أى مستقيم فى أزواج من نقط متضامنة  
[نظرية ديسارج]

لأنه إذا أسقطت نقطتان من هذه النقط على نقطتين دائريتين لانهايتين  
يكون مسقط هذه المنحنيات دوائر مشتركة فى المحور وبذلك تتضح صحة  
النظرية

(مسألة ٣) إذا فرض أن  $a, b, c, d, e, f$  و  $a, b, c, d, e, f$  أوتار  
منحنى قطاع مخروطى فالمطلوب البرهنة على أن النقط  $a, b, c, d, e, f$   
والنقط  $a, b, c, d, e, f$  تقابل حزما متناظرة رأسها نقطة ما  
من نقط المنحنى

للبرهنة على ذلك نسقط المنحنى على دائرة مركزها نقطة و

لنفرض أن  $a_1 a_2 \dots a_n$  مجموعتان من النقط

وحينئذ فالزاويتان المقابلتان للمستقيمين  $a$  و  $b$  ورأسهما نقطة ما على محيط الدائرة تساويان الزاويتين المقابلتين للمستقيمين  $b$  و  $c$  على التناظر.

وإذا فرضت  $\epsilon$   $6\epsilon$  أي تقطين آخرين متناظرين وفرضت نقطة ما على الدائرة فبا أن  $\{1\epsilon\} = \{1\epsilon\}$  وينتج أن الزاويتين  $\epsilon$  و  $6\epsilon$  و  $\epsilon$  متساويتان وأن  $\epsilon = \epsilon = \epsilon = \epsilon$

وحينئذ فغلاف المستقيم ع دائرة متحدة مع الاولى في المركز  
(مسألة ٥) المطلوب رسم مثلث في متحنى قطاع مخروطى بحيث يكون  
كل ضلع من أضلاعه مازا بنقطة ثابتة معلومة

لنفرض  $C_6$  و  $C_6$  ، النقط الثلاثة الثابتة التي تمر بها أضلاع المثلث  
ثم نرسم من نقطة  $C$  وترافا مثل  $B_6$  ونفرض أن  $C_6$  يقطع المنحنى  
في نقطة ثانية مثل  $A_6$  وأن  $A_6$  يقطع المنحنى في نقطة أخرى مثل  $D_6$

ثم نأخذ أى نقطتين أخريين على المنحنى مثل  $\Gamma$  و  $\delta$  ونبحث عن النقطتين المتناظرتين لهما وليكونا  $\delta'$  و  $\Gamma'$

ونفرض  $\sigma$  إحدى النقطتين اللتين على المنحنى والمكوّنتين للارتباط الآتى

$$\{ \sigma \Gamma \Gamma' \sigma' = \{ \sigma \delta \delta' \sigma' \}$$

بفرض أن  $\sigma$  نقطة ما على المنحنى (أنظر بند ١٥٥ مسألة ٤) فإذا فرض أن  $\sigma$  ع يقطع المنحنى في نقطة ثانية مثل  $\sigma$  وأن  $\sigma$  يقطع المنحنى في  $\sigma$  يكون  $\sigma$  مارا بنقطة  $\sigma$  ويكون  $\sigma$   $\sigma$  أحد المثلثين الحقيقيين أو التخيليين اللذين يوفيان بالشروط المطلوبة

### مسائل

(١) المطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم أربعة قطاعات مخروطية لها بؤرة مشتركة ومآزة بثلاث تقط معلومة وأن الوتر البورى العمودى لأحد هذه المنحنيات يساوى مجموع الأوتار البورية العمودية للمنحنيات الثلاثة الأخرى

(٢) إذا فرض أن قطعين مكافئين يمسان أضلاع مثلث معلوم وكانا متقاطعين بالتعامد في نقطة  $\sigma$  فالمطلوب البرهنة على أن نقطة  $\sigma$  يلام أن تكون واقعة على الدائرة المرسومة على المثلث المعلوم

(٣) إذا رسم أى مستقيم من نقطة ثابتة مثل  $\sigma$  و يقطع منحنى قطاع مخروطى معلوم في نقطتي  $\sigma$  و  $\delta$  وفرضت نقطة  $\sigma$  على هذا المستقيم بحيث يكون  $\{ \sigma \delta \sigma' \}$  ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة  $\sigma$  هو منحنى قطاع مخروطى مماس للمنحنى المعلوم في نقطتين

(٤) المطلوب البرهنة على أن دائرتين والدائرة التى قطرها المستقيم الواصل بين مركزي تشابههما يقطعها أى مستقيم فى تضامن

(٥) اذا فرض أن ع ٦ ع ٦ نقطتان متناظرتان في صفيين متناظرين على المستقيمين الثابتين و ١ ٦ و ١ ٦ على التناظر وتم رسم متوازي الاضلاع ع و ع ٦ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة د هو منحنى قطاع مخروطى

(٦) المطلوب البرهنة على أن أى منحنى قطاع مخروطى ماز بالنقط الثلاث الثابتة ١ ٦ ب ٦ ٦ والموضوع بحيث تكون نقطتان أخريان معلومتان متراوجتين بالنسبة له يمر بنقطة ثابتة أخرى

(٧) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز منحنى قطاع مخروطى ماز بالنقطتين الثابتتين ١ ٦ ب ٦ وله زوجان معلومان من النقط المتراوجة أيضا هو منحنى قطاع مخروطى

(٨) اذا فرض أن منحنى قطاع مخروطى مرسوم على مثلث وأن دائرة استدلالة مازة بملتقى أعمدة المثلث فالمطلوب البرهنة على أن المحور القطعى الملتقى بالأعمدة بالنسبة لهذا المنحنى يمس الدائرة القطبية لهذا المثلث

(٩) اذا رسم منحنى قطاع مخروطى ليمر بالنقط الأربعة التى يتقاطع فيها منحنيا قطاعين مخروطيين معلومين ويمر بنقطة تقاطع مماسين مشتركين فالمطلوب البرهنة على أنه يمر أيضا بنقطة تقاطع المماسين الآخرين المشتركين

(١٠) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للرأس التى يمكن أن تسقط منها مجموعة أربع نقط ثابتة في مستو على مربع هو دائرة في مستو عمود على القطر الثالث للشكل الراعى المكوّن من النقط الأربعة المذكورة

(١١) المطلوب البرهنة على أنه يمكن اسقاط أى مثلثين في مستوى منظور على مثلثين متساويي الاضلاع

(١٢) اذا رسمت دائرة وقطع زائد قائم بحيث يكون مركز كل منهما واقعا على المنحنى الآخر ثم رسم قطع مكافئ بحيث تكون بورتة هى مركز القطع الزائد ودليله مماسا للقطع الزائد في مركز الدائرة فالمطلوب البرهنة على ان هناك



عددا لانهايتيا من المثلثات تكون في آن واحد مرسومة في أحد المنحنيات الثلاثة ومرسومة على منحني آخر منها ورؤوسها أقطاب أضلاعها بالنسبة للمنحنى الثالث مهما كان ترتيب المنحنيات

(١٣) المطلوب البرهنة على أن غلاف محاور منحنيات القطاعات المخروطية التي تمس مستقيمين معلومين في نقط ثابتة هو قطع مكافئ

(١٤) المطلوب البرهنة على أنه اذا كان منحنى قطاع مخروطي مرسوم في شكل رباعي هو محيط دائرة فان محوري أى منحني آخر في الشكل الرباعي المذكور يغلطان قطعاً مكافئاً مماساً لأقطار الشكل الرباعي ودليله مار بمتصفات الأقطار

(١٥) المطلوب البرهنة على أن الخطوط التقريبية لجميع منحنيات القطاعات المخروطية التي تمس مستقيمين معلومين في نقطتين معلومتين تغلف قطعاً مكافئاً

(١٦) اذا رسمت دائرة تمس منحنى قطع ناقص في نقطة ثابتة ع وكانت المساسات المشتركة للدائرة والقطع الناقص التي لا تمر بنقطة ع متقاطعة في نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن ط واقعة على القطع الزائد المار بنقطة ع والمشارك مع الأول في البور

(١٧) اذا رسم منحنى قطاع مخروطي في المثلث ا ب ح ومار بمركز الدائرة المرسومة على المثلث المذكور فالمطلوب البرهنة على أن دائرة الاستدلال للمنحنى المذكور تمس الدائرة المرسومة على هذا المثلث وتمس دائرة النقط التسع للمثلث عينه

تم الجزء الثاني من كتاب الخواص الهندسية في القطاعات المخروطية  
والحمد لله أولاً وآخراً

وصلى الله على سيدنا محمد النبي الامى وعلى آله وصحبه وسلم

(1000/1912/2810/202)











col.  
tx.  
6  
21  
2  
2

Bibliotheca Alexandrina



0429458